Satz von Mertens

Satz (Mertens). Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe. Sei

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

Beweis. Sei $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Wir setzen $A_l = \sum_{n=0}^{l} a_n$, $B_l = \sum_{n=0}^{l} b_n$, $C_l = \sum_{n=0}^{l} c_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
C_l &= c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_l \\
&= (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots + (a_0b_l + a_1b_{l-1} + \cdots + a_lb_0) \\
&= a_0(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_l) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{l-1}) + \cdots + a_lb_0 \\
&= a_0B_l + a_1B_{l-1} + \cdots + a_lB_0 \\
&= \sum_{i=0}^{l} a_{l-i}B_i = \sum_{i=0}^{l} a_{l-i}(B_i - B) + A_lB.
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Unten werden wir die Konstanten L, N, M definieren und beweisen, dass für alle $l \geqslant \max\{L, N + M\}$ gilt:

$$|C_l - AB| \leqslant \varepsilon.$$

Daraus direkt folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$ ist.

Wir definieren also die Konstanten N, M, L:

(1) Aus $\lim_{i\to\infty} B_i = B$ folgen (a) und (b):

   (a) Es existiert eine natürliche Zahl N, so dass für alle $i \geqslant N$ gilt:

$$|B_i - B| < \frac{\varepsilon/3}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + 1}.$$

   (b) Die Folge $(B_i)_{i\geqslant 0}$ ist beschränkt. Also existiert eine reelle Zahl $R > 0$, so dass für alle $i \geqslant 0$ gilt:

$$-R < B_i < R.$$

   Deswegen gilt auch

$$-R < B < R.$$

(2) Aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|a_i|$ folgt:

Es existiert eine natürliche Zahl M, so dass für alle $p, q \geqslant M$ gilt:

$$\sum_{i=p}^{q}|a_i| < \frac{\varepsilon/3}{2R}.$$

(3) Aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i$ folgt:

Es existiert eine natürliche Zahl L, so dass für alle $l \geqslant L$ gilt:

$$|A_l - A| < \frac{\varepsilon/3}{|B|+1}.$$

Sei $l \geqslant \max\{L, N+M\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|C_l - AB| &= \Big|\sum_{i=p}^{l} a_{l-i}(B_i - B) + (A_l - A)B\Big| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{N-1}\big(|a_{l-i}|\cdot|B_i - B|\big) + \sum_{i=N}^{l}\big(|a_{l-i}|\cdot|B_i - B|\big) + |A_l - A|\cdot|B| \\
&\leqslant \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus drei Abschätzungen:

- $$\sum_{i=0}^{N-1}\big(|a_{l-i}|\cdot|B_i - B|\big) \overset{(1b)}{\leqslant} 2R\cdot\sum_{i=0}^{N-1}|a_{l-i}| \overset{(2)}{\leqslant} 2R\cdot\frac{\varepsilon/3}{2R} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

  Hier benutzen wir noch die Abschätzung $l-i \geqslant l-(N-1) \geqslant (N+M)-(N-1) \geqslant M$, was in (2) erforderlich ist.

- $$\sum_{i=N}^{l}\big(|a_{l-i}|\cdot|B_i - B|\big) \overset{(1a)}{\leqslant} \sum_{i=N}^{l}|a_{l-i}|\cdot\frac{\varepsilon/3}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

- $$|A_l - A|\cdot|B| \overset{(3)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{3}.$$

□