Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

SoSe 2017
7. August 2017

Klausur zu Analysis I

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^4+3n^2+1}{n^2} - \frac{n^5+n^3}{n^3+1}\right)$ [3P.]

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2^x-5^x+3^x}$ [3P.]

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x^2}{1-\cos(x)}$ [4P.]

Aufgabe 2. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Startwert $x_1 \in \mathbb{R}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} := x_n - x_n^2.$$

(a) Beweisen Sie, dass diese Folge monoton fallend ist. [1P.]

(b) Beweisen Sie, dass diese Folge konvergent für alle $x_1 \in [0,1]$ ist.
Finden Sie ihren Grenzwert in Abhängigkeit von $x_1 \in [0,1]$. [4P.]

(c) Beweisen Sie, dass diese Folge divergent für alle $x_1 \in \mathbb{R}\setminus[0,1]$ ist. [5P.]

Aufgabe 3. Finden Sie jeweils eine Stammfunktion der folgenden Funktionen f:

(a) $f(x) = \sin(x)\cos(2x+1)$ [3P.]

(b) $f(x) = \frac{5x}{2x^2+3x-2}$ [4P.]

(c) $f(x) = \frac{1}{x}\cdot\cos(\log x)$ [3P.]

Der Lösungsweg mit der Indikation der Integrationsregel ist erforderlich.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 4.

(a) Finden Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (nz)^n$. [3P.]

(b) Untersuchen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 2^n} \cdot z^{3n}$ konvergiert. [4P.]

(c) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - \frac{1}{n}\right)$ konvergiert. [6P.]

Hinweis. Untersuchen Sie gegebenenfalls den Rand das Konvergenzkreises gesondert.

Aufgabe 5.

(a) Finden Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3x - 4 - 2\log|x|$$

alle kritischen Stellen und alle maximalen Intervalle, auf denen f strikt monoton wachsend bzw. strikt monoton fallend ist. [3P.]

(b) Geben Sie $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\nearrow 0} f(x)$, $\lim_{x\searrow 0} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$ an. Eine Begründung ist nicht erforderlich. [2P.]

(c) Beweisen Sie, dass f genau drei Nullstellen hat. [3P.]

(d) Finden Sie alle maximalen Intervalle, auf denen $f(x)$ konvex bzw. konkav ist. [3P.]

Aufgabe 6.

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere man $a_n := e + 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Es ist bekannt, dass $a_n > 0$ gilt. Ferner definiere man

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (a_n)^x \cos x.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist. [3P.]

(b) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a_n)^x \cos x \, \mathrm{dx}.$$

[3P.]