Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matteo Vannacci

Abgabe: 2.07. bis 10:20 Uhr

Kombinatorische Gruppentheorie
Übungsblatt 11

Am 25.06.19 wurde der folgende Satz formuliert:

Satz. Die Gruppe $\mathrm{BS}(2,3) = \langle x, y \mid x^{-1}y^2x = y^3\rangle$ kann nicht mit einer Relation im Erzeugersystem x, y^4 präsentiert werden.

Folgende Aufgaben sind Teile des Beweises, der am 28.06.19 besprochen wird.

Aufgabe 1. Wir bezeichnen $z = y^4$. **3+10P.**

(a) Beweisen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{BS}(2,3) = \langle x, y \mid x^{-1}y^2x = y^3\rangle$ von x und z erzeugt werden kann.

(b) Geben Sie eine Präsentation der Gruppe $\mathrm{BS}(2,3)$ mit Erzeuger x, z und zwei Relationen.

Hinweis zu (b). Sie starten von der Präsentation $\langle x, y, z \mid x^{-1}y^2x = y^3,\ z = y^4\rangle$ und eliminieren y mit Hilfe von Tietze-Transformationen (s. Punkte 21.7 und 21.8 des Kurzskripts im Netz).

Aufgabe 2. Wir betrachen zwei Untergruppen der freien Gruppe $F(x, y)$: **12P.**

$$\begin{aligned} A &= \langle x^{-i}yx^i \mid i \in \mathbb{Z}\rangle, \\ B &= \langle x, y^4\rangle \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $A \cap B$ frei mit der Basis $\{x^{-i}y^4x^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ ist.

Aufgabe 3. Wir betrachten zwei isomorphe Gruppen **3+12 P.**

$$G = \langle x, y \mid x^3 = y^2\rangle.$$

$$H = \langle a, b \mid a^3 = b^2\rangle,$$

(a) Beweisen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto a^4$ und $y \mapsto b^4$ bis zu einem Homomorphismus $\varphi : G \to H$ fortgesetzt werden kann.

(b) Beweisen Sie, dass dieser Homomorphismus eine Einbettung ist.