Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matteo Vannacci

Abgabe: 23.04. bis 10:20 Uhr

Kombinatorische Gruppentheorie
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. **2+3+3P.**

(a) Wie viele reduzierte Elemente der Länge 2 gibt es in der freien Gruppe $F(a,b)$?

(b) Wie viele reduzierte Elemente der Länge k gibt es in der freien Gruppe $F(a,b)$?

(c) Finden Sie x, y, z in $F(a,b)$, so dass $a^{-1}b^{-1}ab = x^2y^2z^2$ gilt. Es reicht, wenn Sie eine Lösung finden.

Aufgabe 2. Es ist bekannt, dass $F(a,b)$ genau 13 Untergruppen von Index 3 enthält. **4+4P.**

(a) Geben Sie Basen einiger zwei von diesen Untergruppen.

(b) Geben Sie noch eine Untergruppe von Index 3, die normal in $F(a,b)$ ist.

Aufgabe 3. Wir betrachten die folgenden Untergruppen von Index 2 in $F(a,b)$:

$$\begin{aligned} H_1 = &\quad \{a, b^2, bab^{-1}\}, \\ H_2 = &\quad \{b, a^2, aba^{-1}\}. \end{aligned}$$

Finden Sie eine Basis von $H_1 \cap H_2$.

Aufgabe 4. Sei H die Menge aller Elemente der geraden Länge in $F(a,b)$. **3+3+2P.**

(a) Beweisen Sie, dass H eine Untergruppe von Index 2 in $F(a,b)$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass $H = \langle a^2, b^2, ab\rangle$ gilt.

(c) Beweisen Sie, dass H den Rang 3 hat.

Aufgabe 5. **3+5P.**

(a) Ist die Untergruppe $H = \langle ab, ba\rangle$ von $F(a,b)$ normal?

(b) Ist der Index $|F(a,b) : H|$ endlich?

Hinweis: Ihre Antworten müssen begründet werden.