Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matteo Vannacci

Abgabe: 7.05. bis 10:20 Uhr

Kombinatorische Gruppentheorie
Übungsblatt 4

Für eine Matrix

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

sei $\gamma_X : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung, die durch

$$\gamma_X(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

definiert ist. Seien

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der Vorlesung haben wir bewiesen, dass die Modulargruppe

$$\Gamma := \{\gamma_X \mid X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\}$$

die Präsentation

$$\langle t, r \mid t^2 = 1,\, r^3 = 1 \rangle$$

hat, wobei t und r den Elementen γ_T und γ_R entsprechen. Auch haben wir bewiesen, dass

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm E\} \cong \Gamma$$

gilt.

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die folgende Präsentation hat: **10P.**

$$\{T, R \mid T^4 = 1,\, R^6 = 1,\, T^2 = R^3\}.$$

Aufgabe 2. Die Menge $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ heißt *Poincare-Ebene.* **6+4+4+6P.**

(a) Beweisen Sie, dass $\gamma_X(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$ für alle $X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Finden Sie die Fixpunktmengen von γ_T und γ_R in $\mathbb{P}$.

(c) Sei $I := \{ir \mid r \geqslant 1\} \subset \mathbb{P}$. Skizzieren Sie $(\gamma_T)^k(I)$ für $k = 0, 1$.

(d) Sei $J := \{\frac{1}{2} + ir \mid r > 0\} \subset \mathbb{P}$. Skizzieren Sie $(\gamma_R)^k(J)$ für $k = 0, 1, 2$.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. Die *Heisenberg-Gruppe* ist die multiplikative Gruppe der Matrizen der Form **10P.**

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit x, y, z aus $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass H die folgende Präsentation hat:

$$\langle X, Y, Z \mid [X, Y] = Z,\ [X, Z] = 1,\ [Y, Z] = 1 \rangle,$$

wobei $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ bezeichnet.