Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matteo Vannacci

Abgabe: 21.05. bis 10:20 Uhr

Kombinatorische Gruppentheorie
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. **4+6+6P.**

Sei $G = \langle a, b \,|\, ab^3a^3b^5 \rangle$.

(1) Finden Sie $n \in \mathbb{Z}$, so dass für die Präsentation von G in den Erzeugern $x = ab^n$ und $y = b$

$$G = \langle x, y \,|\, w(x, y) \rangle$$

gilt: $\sigma_y(w) = 0$.

(2) Stellen Sie G als eine HNN-Erweiterung dar:

$$G = H \underset{A \xrightarrow{\varphi} B}{*}$$

(3) Mit Hilfe von (2) beweisen Sie, dass $aba^2b^3 \neq 1$ in G ist.

Aufgabe 2. **6+6+2P.**

(a) Sei $G = A \underset{C}{*} B$ ein amalgamiertes Produkt mit $C \neq A$ und $C \neq B$. Beweisen Sie, dass das Zentrum von G in C liegt, also gilt

$$Z(G) \leqslant C.$$

(b) Sei $G = H \underset{A \xrightarrow{\varphi} B}{*}$ eine HNN-Erweiterung mit $A \neq H$ (dabei kann $B = H$ sein). Beweisen Sie, dass das Zentrum von G in A liegt, also gilt

$$Z(G) \leqslant A.$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Stellen Sie die freie abelsche Gruppe $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n}$ als eine HNN-Erweiterung dar.

Aufgabe 3.

(a) Beweisen Sie, dass die Gruppe **6P.**

$$G_2 = \langle a_1, a_2 \,|\, a_1^{-1}a_2a_1 = a_2^2,\;\; a_2^{-1}a_1a_2 = a_1^2 \rangle$$

trivial ist.

(b) Beweisen Sie (ohne ins Netz zu schauen), dass die Gruppe **100P.**

$$G_3 = \langle a_1, a_2, a_3 \,|\, a_1^{-1}a_2a_1 = a_2^2,\;\; a_2^{-1}a_3a_2 = a_3^2,\;\; a_3^{-1}a_1a_3 = a_1^2 \rangle$$

trivial ist.

Bemerkung: Für dienigen, die die Aufgabe 3 (b) nicht lösen werden, wird diese Aufgabe bei der Berechnung der Punktezahl rausgenommen.