Prof. Dr. Oleg Bogopolski Keine Abgabe. Besprechung: 21.10.

Gruppentheorie
Übungsblatt 0

Aufgabe 1. Wir betrachten die zyklische Gruppe $G = \mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$ und ihre Untergruppe $H = \{0, 4, 8\}$. Beweisen Sie

(a) $H \cong \mathbb{Z}_3$.

(b) $G/H \cong \mathbb{Z}_4$.

Aufgabe 2.

(a) Sei H eine Untergruppe von G mit $|G : H| = 2$. Beweisen Sie, dass H normal in G ist.

(b) Beweisen Sie dass die Gruppe A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt. (A_n ist die Gruppe aller geraden Permutationen der Symbole $1, 2, \dots, n$.)

Aufgabe 3.

(a) Beweisen Sie, dass die additive Gruppe der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +)$ nicht endlich erzeugt werden kann.

(b) Beweisen Sie, dass jeder Homomorphismus von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}$ trivial ist.

(Ein Homomorphismus heißt *trivial*, wenn sein Bild gleich 0 ist.)

Aufgabe 4. Wir betrachten die Untergruppe $K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ von S_4. Beweisen Sie:

(a) $S_4 = S_3 \cdot K$.

(b) $S_4/K \cong S_3$.

(c) Beweisen Sie, dass jede Untergruppe der Ordnung 8 in S_4 die Untergruppe K enthält.

(d) Finden Sie alle Untergruppen der Ordnung 8 in S_4.

Hinweis zu (d): Benutzen Sie (c) und Satz 1.1.