**Gruppentheorie**
Übungsblatt 1

**Aufgabe 1.** **3+3+4P.**

(a) Berechnen Sie die Menge aller linken Nebenklassen von $H = \{id, (123), (132)\}$ in $A_4$.
($A_n$ ist die Gruppe aller geraden Permutationen der Symbole $1, 2, \dots, n$.)

(b) Ist $H$ normal in $A_4$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Listen Sie alle normalen Untergruppen von $A_4$ auf.

*Hinweis* zu (c): Benutzen Sie Aufgabe 2 (b) aus Blatt 0 und den Satz von Lagrange: Ist $H$ eine Untergruppe einer endlichen Gruppe $G$, dann ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$.

**Aufgabe 2.** Wir betrachten die multiplikative Gruppe $G$ aller Matrizen der Form **3+4+3P.**

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Auch betrachten wir die folgende Untergruppe von $G$:

$$H \quad = \{g \in G \mid g_{12} = g_{23} = 0\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass $H$ normal in $G$ ist.

(b) Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & G \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \\ & g \to (g_{12}, g_{23}). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $\varphi$ ein surjektiver Homomorphismus ist.

(c) Beweisen Sie: $G/H \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

*Hinweis.* Unter $\mathbb{R}$ verstehen wir die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$.

**Aufgabe 3.** **5+5P.**

(a) Schreiben Sie alle Elemente von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ auf.

(b) Finden Sie einen Isomorphismus $\varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \to S_3$.

*Hinweis.* $\mathrm{GL}_n(K)$ ist die Gruppe aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $K$.

**Aufgabe 4.** Seien $A \leqslant G$ und $B \leqslant G$. Beweisen Sie, dass $|A : (A \cap B)| \leqslant |G : B|$ gilt. **10 P.**

*Hinweis.* Sei $X$ die Menge der linken Nebenklassen von $A \cap B$ in $A$ und sei $Y$ die Menge der linken Nebenklassen von $B$ in $G$. Denken Sie sich eine injektive Abbildung von $X$ nach $Y$ aus.