Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe: 18.01. bis 16:00 Uhr
Besprechung: 20.01.

Einführung in die Gruppentheorie
Übungsblatt 11

Aufgabe 1. **2+4+4P.**

(a) Wie viele reduzierte Elemente der Länge 2 gibt es in der freien Gruppe $F(a, b)$?

(b) Wie viele reduzierte Elemente der Länge k gibt es in der freien Gruppe $F(a, b)$?

(c) Finden Sie x, y, z in $F(a, b)$, so dass $a^{-1}b^{-1}ab = x^2y^2z^2$ gilt. Es reicht, wenn Sie eine Lösung finden.

Aufgabe 2. **2+3+5P.**

(a) Sei $g = a^{-1}b^{-2}a^2b^3a \in F(a, b)$. Berechnen Sie die reduzierte Form von g^3.

(b) Sei $1 \neq g \in F(a, b)$. Beweisen Sie, dass $|g^n| > |g|$ für alle $n \geqslant 2$ ist.

(c) Seien u, v zwei Elemente einer freien Gruppe F, so dass $u^n = v^n$ für ein $n \geqslant 1$ gilt. Beweisen Sie, dass $u = v$ gilt.

Aufgabe 3. Sei H die Menge aller Elemente der geraden Länge in $F(a, b)$. **3+3+3P.**

(a) Beweisen Sie, dass H eine Untergruppe von Index 2 in $F(a, b)$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass $H = \langle a^2, b^2, ab\rangle$ gilt.

(c) Beweisen Sie, dass H den Rang 3 hat.

Aufgabe 4. **4+6P.**

(a) Ist die Untergruppe $H = \langle ab, ba\rangle$ von $F(a, b)$ normal?

(b) Ist der Index $|F(a, b) : H|$ endlich?

Hinweis: Ihre Antworten müssen begründet werden.

Aufgabe 5. Sei $U = (ab^2a,\ ababab,\ a^{-1}b^{-1}abab^2a)$. **6+2P.**

(a) Transformieren Sie U zu einem Nielsen-irreduzieblen Tupel U' mit Hilfe von Nielsen-Transformationen.

(b) Finden Sie den Rang der freien Gruppe, die U erzeugt.