

Einführung in die Gruppentheorie
Übungsblatt 3

Aufgabe 1.

3+3P.

- (a) Sei $n \geq 2$. Finden Sie eine Untergruppe $B \leq S_n$, so dass $S_n = A_n \rtimes B$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Beweisen Sie, dass $S_4 = K \rtimes S_3$ ist, wobei $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (23)(14)\}$ ist.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3 \cong S_4$ ist.

8P.

Hinweis: Wie viele Elemente der Ordnung 2 gibt es in $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3$ und in S_4 ?

Aufgabe 3. Beweisen Sie Satz 3.5 (a) des Skripts:

8P.

$$A \wr B = \text{Fun}(B, A)' \rtimes B'.$$

Aufgabe 4. Das Zentrum einer Gruppe G wird so definiert:

3+6+9P.

$$Z(G) := \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$$

- (a) Beweisen Sie, dass $Z(G)$ eine Untergruppe von G ist.
- (b) Berechnen Sie $Z(A \wr B)$, wobei $A = \{e_1, a\} \cong \mathbb{Z}_2$ und $B = \{e_2, b\} \cong \mathbb{Z}_2$ sind.
- (c) Beweisen Sie, dass $Z(A \wr B) = \{e\}$ ist, falls B unendlich und $A \neq 1$ ist.