

Einführung in die Gruppentheorie
Übungsblatt 4

Aufgabe 1.

4+6P.

- (a) Finden Sie eine dichte subnormale Reihe in S_4 .
- (b) Finden Sie alle dichten subnormalen Reihen in $Quat$.

Hinweis. Dichte subnormale Reihen sind in Punkt 4.3 definiert. Die Quaternionen-Gruppe $Quat$ ist in Abschnitt 5 des Skripts definiert. Für (b) ist Satz 4.4 nützlich.

Aufgabe 2. Sei $G = A \wr B$, wobei $A = \{e_1, a, a^2\} \cong \mathbb{Z}_3$ und $B = \{e_2, b\} \cong \mathbb{Z}_2$ ist. **6+6P.**
Nach Satz 5.3 enthält G alle Erweiterungen von \mathbb{Z}_3 mit Hilfe von \mathbb{Z}_2 . Insbesondere enthält G Kopien von \mathbb{Z}_6 und S_3 .

- (a) Finden Sie in G eine Untergruppe, die zu \mathbb{Z}_6 isomorph ist.
- (b) Finden Sie in G eine Untergruppe, die zu S_3 isomorph ist.

Hinweis. Benutzen Sie Behauptung 7.3.

Aufgabe 3. Sei H eine nichttriviale minimale normale Untergruppe von S_4 . **5+5P.**

- (a) Beweisen Sie, dass H keine einfache Gruppe ist. ← schwer
- (b) Benutzen Sie (a) und Satz 6.3, um H zu finden.

Hinweis. Sie dürfen (b) lösen, wenn Sie die Lösung von (a) nicht finden können.

Aufgabe 4. Sei $n \geq 5$. Beweisen Sie, dass A_n von allen 5-Zyklen erzeugt ist. **8P.**

Hinweis. Benutzen Sie Lemma 6.4.

Wenn nur der Fall $n = 5$ betrachtet wird, wird das mit 6 Punkten bewertet.