Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe: 30.11. bis 16:00 Uhr
Besprechung: 2.12.

Einführung in die Gruppentheorie
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Nach Behauptung 10.7 existieren in S_4 genau drei 2-Sylow Untergruppen. **5+3+5P.** Diese sind:

$$H_1 = K \cup K(12),$$
$$H_2 = K \cup K(13),$$
$$H_3 = K \cup K(23),$$

wobei $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ist.

(a) Beweisen Sie, dass es nur 2 doppelte Nebenklassen von H_1, H_2 in S_4 gibt.

(b) Wie viele Elemente enthalten jeweils diese doppelten Nebenklassen?

(c) Überprüfen Sie die Formel aus dem Satz 10.3 für diese Situation:

$$|S_4 : H_2| = \sum_{x \in X} |H_1 : H_1 \cap xH_2x^{-1}|,$$

wobei X eine Menge von Repräsentanten der doppelten Nebenklassen von H_1, H_2 in S_4 ist.

Hinweis. (a) Wählen Sie (fast) zufällig zwei Elemente $a, b \in S_4$, so dass gilt:

$$S_4 = (H_1 a H_2) \coprod (H_1 b H_2).$$

(b) Sie können $X = \{a, b\}$ nehmen.

Aufgabe 2. **2+4+5+5P.**

(a) Berechnen Sie die Ordnungen von $\mathrm{PSL}_2(2)$ und $\mathrm{PSL}_2(3)$.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{PSL}_2(2) \cong S_3$ ist.

(c) Finden Sie in $\mathrm{PSL}_2(3)$ eine Untergruppe der Ordnung 4 und eine der Ordnung 3.

(d) Beweisen Sie, dass $\mathrm{PSL}_2(3) \cong A_4$ ist.

Hinweis. Betrachten Sie die Operierung von $\mathrm{PSL}_2(3)$ auf den Geraden des 2-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{F}_3^2$, die in dem Beweis des Satzes 9.3 besprochen wurde. Wenn Sie die Vorlesungen nicht besuchen, dann schauen Sie in mein Buch (Seiten 22-23).

Aufgabe 3. **2+9P.**

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Wenn G nur eine p-Sylow Untergruppe enthält, dann ist diese Untergruppe normal.

(b) Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 77 zyklisch ist.

Hinweis. Benutzen Sie Satz 10.6 von Sylow.