Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Gruppentheorie
Lösungen zum Übungsblatt 1

Aufgabe 1.

(a) Berechnen Sie die Menge aller linken Nebenklassen von $H = \{id, (123), (132)\}$ in A_4.
(A_n ist die Gruppe aller geraden Permutationen der Symbole $1, 2, \ldots, n$.)

(b) Ist H normal in A_4? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Listen Sie alle normalen Untergruppen von A_4 auf.

Lösung.
(a) Es gibt $\frac{|A_4|}{|H|} = \frac{12}{3} = 4$ Nebenklassen von H in A_4. Das sind

$$H,\ (12)(34)H,\ (13)(24)H,\ (14)(23)H.$$

Sie sind verschieden wegen des Kriteriums: $g_1H \neq g_2H \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \notin H$.
Z.B. ist $((12)(34))^{-1}((13)(24)) = (14)(23) \notin H$.

(b) H ist nicht normal in A_4: für $g = (12)(34) \in A_4$ und $h = (123) \in H$ gilt

$$g^{-1}hg = (34)(12)(123)(12)(34) = (142) \notin H.$$

(c) Sei $L \trianglelefteq A_4$. Dann gilt $|L| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Nach Aufgabe 2 des Übungsblatts 0 existiert keine Untergruppe der Ordnung 6 in A_4. Die triviale Untergruppe und die ganze Gruppe sind normal. Deswegen bleiben nur drei Fälle zu betrachten.

Fall 1. $|L| = 4$.
Sei $K = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ die Kleinsche Gruppe. Merken wir an, dass $A_4 \setminus K$ nur aus 3-Zyklen besteht. Da aber L kein Element der Ordnung 3 besitzt, gilt $L = K$.

Fall 2. $|L| = 3$.
Dann hat L die Form $\{\mathrm{id}, (ijk), (ikj)\}$. Diese Untergruppe ist nicht normal in A_4, s. Teilaufgabe (b).

Fall 3. $|L| = 2$.
Dann hat L die Form $\{\mathrm{id}, (ij)(kl)\}$. Diese Untergruppe ist aber nicht normal in A_4, da sie die Konjugation mit Hilfe von (ijk) nicht erhält:

$$(ijk)^{-1} \cdot (ij)(kl) \cdot (ijk) = (ik)(jl) \notin L.$$

Antwort. Alle normalen Untergruppen von A_4 sind $\{\mathrm{id}\}, K, A_4$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die multiplikative Gruppe G aller Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Auch betrachten wir die folgende Untergruppe von G:

$$H \quad = \{g \in G \mid g_{12} = g_{23} = 0\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass H normal in G ist.

(b) Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & G \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \\ & g \to (g_{12}, g_{23}). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass φ ein surjektiver Homomorphismus ist.

(c) Beweisen Sie: $G/H \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Lösung.

(a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beliebige Elemente aus G und H. Man kann überprüfen, dass $A^{-1}BA = B$ ist. Deswegen gilt $H \trianglelefteq G$.

(b) Sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen überprüfen, dass $\varphi(AA_1) = \varphi(A) + \varphi(A_1)$ ist. Wir haben

$$AA_1 = \begin{pmatrix} 1 & a + a_1 & * \\ 0 & 1 & b + b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\varphi(AA_1) = (a + a_1, b + b_1) = (a, b) + (a_1, b_1) = \varphi(A) + \varphi(A_1)$.

Die Surjektivität von φ ist klar.

(c)

$$\ker(\varphi) = \{A \in G \mid \varphi(A) = (0, 0)\} = \{A \in G \mid A_{12} = A_{23} = 0\} = H.$$

$$\operatorname{im}(\varphi) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Nach Satz 1.2 gilt $G/\ker(\varphi) \cong \operatorname{im}(\varphi)$, also gilt $G/H \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.

(a) Schreiben Sie alle Elemente von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ auf.

(b) Finden Sie einen Isomorphismus $\varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \to S_3$.

Lösung.
(a)

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Wir betrachten den 2-dimensionalen $\mathbb{Z}_2$-Vektotorraum $V = \{\mathbf{0}, X_1, X_2, X_3\}$ mit

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren eine Abbilding $\varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \to S_3$ nach der Regel

$$A \mapsto \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ AX_1 & AX_2 & AX_3 \end{pmatrix}.$$

- Es gilt $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ für alle $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$.
- Außerdem gilt

  $$\ker(\varphi) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \mid AX_i = X_i, i = 1, 2, 3\} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

  Also ist φ injektiv.
- Da $|\mathrm{GL}(\mathbb{Z}_2)| = |S_3| = 6$ ist, ist φ surjektiv.

Deswegen ist φ ein Isomorphismus.

Aufgabe 4. Seien $A \leqslant G$ und $B \leqslant G$. Beweisen Sie, dass $|A : (A \cap B)| \leqslant |G : B|$ gilt.

Lösung. Die Menge der linken Nebenklassen von $A \cap B$ in A ist $X := \{a(A \cap B) \mid a \in A\}$.
Die Menge der linken Nebenklassen von B in G ist $X := \{gB) \mid g \in G\}$.
Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & X \to Y, \\ & a(A \cap B) \mapsto aB \end{aligned}$$

- φ ist korrekt definiert: Wenn $a(A \cap B) = a_1(A \cap B)$ ist, dann gilt $a_1^{-1}a \in A \cap B$. Insbesondere gilt $a_1^{-1}a \in B$, also gilt $aB = a_1B$.
- φ ist injektiv:

  Ist $aB = a_1B$, dann gilt $a_1^{-1}a \in B$. Auch gilt $a_1^{-1}a \in A$. Deswegen gilt $a_1^{-1}a \in A \cap B$. Daraus folgt $a(A \cap B) = a_1(A \cap B)$.

Deswegen gilt $|X| \leqslant |Y|$. Somit gilt $|A : (A \cap B)| \leqslant |G : B|$.