Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Einführung in die Gruppentheorie
Lösungen zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1. **4+6P.**
(a) Finden Sie eine dichte subnormale Reihe in S_4.
(b) Finden Sie alle dichten subnormalen Reihen in $Quat$.

Lösungsvorschlag. Wir werden das folgende Lemma benutzen.

Lemma. Sei $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$ eine subnormale Reihe. Wenn, alle Indizes $|G_{i+1} : G_i|$ Primzahlen sind, dann ist diese Reihe dicht.

Beweis. Wäre eine Abdichtung $G_i \trianglelefteq A \trianglelefteq G_{i+1}$ mit $A \neq G_i, G_{i+1}$ möglich, dann wäre $|G_{i+1} : G_i| = |G_{i+1} : A| \cdot |A : G_i|$ eine zusammengesetzte Zahl. □

(a) Sei $B = \{id, (12)(34)\}$ und $K = \{\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Dann ist die folgende Reihe subnormal:

$$\{id\} \trianglelefteq B \trianglelefteq K \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4.$$

Da die Indizes $|B : \{id\}| = 2$, $|K : B| = 2$, $|A_4 : K| = 3$, $|S_4 : A_4| = 2$ Primzahlen sind, ist diese Reihe dicht.

(b) Es gibt genau drei dichte subnormale Reihen in $Quat$:

$$\{1\} \trianglelefteq \{1, -1\} \trianglelefteq \{1, -1, i, -i\} \trianglelefteq Quat,$$

$$\{1\} \trianglelefteq \{1, -1\} \trianglelefteq \{1, -1, j, -j\} \trianglelefteq Quat,$$

$$\{1\} \trianglelefteq \{1, -1\} \trianglelefteq \{1, -1, k, -k\} \trianglelefteq Quat.$$

Entscheidend ist die Bemerkung, dass $|G_{i+1} : G_i| = 2$ für alle i ist. Daraus folgt die Subnormalität ($G_i \trianglelefteq G_{i+1}$) und die Dichte (siehe Lemma oben). Warum diese Reihen alle subnormale dichte Reihen in $Quat$ sind:

Nach Satz 4.4 hat jede dichte subnormale Reihe in $Quat$ die Form

$$\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_3 = Quat$$

mit allen Indizes $|G_{i+1} : G_i|$ gleich 2. Das einzige Element der Ordnung 2 in $Quat$ ist -1. Deswegen ist $G_1 = \{1, -1\}$. In G_2 muss noch mindestens ein $g \in \{i, -i, j, -j, k, -k\}$ liegen. Dann ist $G_2 = \{1, g, g^2, g^3\} = \{1, g, -1, -g\}$.

Aufgabe 2. Sei $G = A \wr B$, wobei $A = \{e_1, a, a^2\} \cong \mathbb{Z}_3$ und $B = \{e_2, b\} \cong \mathbb{Z}_2$ ist. **6+6P.**
Nach Satz 5.3 enthält G alle Erweiterungen von $\mathbb{Z}_3$ mit Hilfe von $\mathbb{Z}_2$. Insbesondere enthält G Kopien von $\mathbb{Z}_6$ und S_3.

(a) Finden Sie in G eine Untergruppe, die zu $\mathbb{Z}_6$ isomorph ist.

(b) Finden Sie in G eine Untergruppe, die zu S_3 isomorph ist.

Lösungsvorschlag.

(a) Wir betrachten ein beliebiges Element $g = xf \in G$ mit $x \in B$ und $f \in \mathrm{fun}(B, A)$. Es gilt $b^2 = e_2$ und $f^3 = id$, weil $f^3(x) = (f(x))^3 = e_1$ für alle $x \in B$ ist. Dann gilt

$$g^6 = x^6 f^{(x^5)} f^{(x^4)} f^{(x^3)} f^{(x^2)} f^x f = e_2 f^x f f^x f f^x f = e_2 (f^x)^3 f^3 = e_2 id.$$

Also gilt $\mathrm{Ord}(g) \in \{1, 2, 3, 6\}$.

Dabei ist $\mathrm{Ord}(g) = 6$ genau dann, wenn g, g^2 und g^3 nichttriviale Elemente sind.

Das Element $g = xf$ mit $x = b$ und $f(e_2) = a$, $f(b) = a$ hat die Ordnung 6. Also gilt $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_6$.

(b)

Lemma ♡. Sei $H = \langle x, y \rangle$ wobei $\mathrm{Ord}(x) = 2$ und $\mathrm{Ord}(y) = 3$ ist und $x^{-1} y x = y^{-1}$ gilt. Dann gilt $H \cong S_3$.

Beweis. Da $\mathrm{Ord}(x) = 2$ und $\mathrm{Ord}(y) = 3$ ist, ist 6 ein Teiler von $|H|$. Die Regeln $x^2 = y^3 = e$ und $x^{-1}yx = y^{-1}$ ermöglichen alle Produkte $x^{n_1} y^{m_1} \dots x^{n_k} y^{n_k}$ in der Form $x^n y^m$ mit $n \in \{0, 1\}$, $m \in \{0, 1, 2\}$ umschreiben. Zum Beispiel:

$$x^5 y^8 x^3 y^4 = xy^2 xy = x^2 (x^{-1} y^2 x) y = e(y^{-2}) y = y^2.$$

Deswegen gilt

$$H = \{x^n y^m \,|\, n \in \{0, 1\}; m \in \{0, 1, 2\}\}.$$

Somit gilt $|H| \leqslant 6$. Da 6 ein Teiler von $|H|$ ist, ist $|H| = 6$. Da H nichtkommutativ ist, ist $H \cong S_3$ (nach Behauptung 7.3). $\square$

Die Elemente $x = b\,id$ und $y = e_2 f$ mit $f(e_2) = a$ und $f(b) = a^2$ erfüllen die Bedingungen von Lemma ♡. Also gilt $\langle x, y \rangle \cong S_3$.

Aufgabe 3. Sei H eine nichttriviale minimale normale Untergruppe von S_4. **5+5P.**

(a) Beweisen Sie, dass H keine einfache Gruppe ist. $\leftarrow$ schwer

(b) Benutzen Sie (a) und Satz 6.3, um H zu finden.

Lösungsvorschlag. Zuerst beweisen wir: Alle normalen Untergruppen von S_4 sind

$$\{id\}, K, A_4, S_4,$$

wobei $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ist.
Sei $N \trianglelefteq S_4$ eine normale Untergruppe, die ungleich $\{id\}$ ist.

Fall 1. N enthält einen 2-Zyklus.

Dann enthält N alle 2-Zyklen. Somit gilt $N = S_4$.

Fall 2. N enthält einen 3-Zyklus.

Dann enthält N alle 3-Zyklen. Nach Lemma 6.4 gilt $A_4 \leqslant N$. Somit ist $N = A_4$ oder $N = S_4$.

Fall 3. N enthält einen 4-Zyklus.

Dann enthält N alle 4-Zyklen. Insbesondere ist $(1234)(1243) = (132) \in N$. Nach Fall 3 ist $N = A_4$ oder $N = S_4$. Da ein 4-Zyklus ungerade ist, gilt $N = S_4$.

Fall 4. N enthält keine k-Zyklen. Dann ist $N = K = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

(a)&(b) Da $K \leqslant A_4$ ist, ist K die nichttriviale minimale normale Untergruppe von S_4. Die Untergruppe K ist nicht einfach, da $\{id, (12)(34)\} \trianglelefteq K$ ist.

Aufgabe 4. Sei $n \geqslant 5$. Beweisen Sie, dass A_n von allen 5-Zyklen erzeugt ist. **8P.**

Lösungsvorschlag. Nach Lemma 6.4 (a) ist A_n von allen 3-Zyklen erzeugt. Dann folgt die Behauptung aus dem Fakt $(ijk) = (ikpjq) \cdot (ipkqj)$.