# Das Wachstum der Grigorchuk Gruppe

Claudia Gassenmeier

April 2020

Dieses Skript basiert auf einer Ausarbeitung von Prof. Dr. Oleg Bogopolski zu dem Wachstum der Grigorchuk Gruppe und auf dem Buch *Topics in geometric group theory* von Pierre de la Harpe, Univ. of Chicago Press, 2000.

## Contents

# 1 Wachstum von Gruppen

Sei $G$ eine endlich erzeugte Gruppe.

## 1.1 Ein paar Definitionen

**1.1 Definition** Sei $S$ ein endliches Erzeugendensystem für $G$.
Die *Länge* eines Elements von $G$ **bezüglich** $S$ ist definiert durch

$$l_{G,S}(g) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid g = s_1...s_n \; mit \; s_1, ..., s_n \in S \cup S^{-1}\},$$

wobei $S^{-1} = \{s^{-1} | s \in S\}$ (De la Harpe S.75 IV.1)

**1.2 Definition** Definiere durch $B_S(n) = \{g \in G \mid l_S(g) \leq n\}$ die Kugel vom Radius n in $G$. Dann ist die *Wachstumsfunktion* von $G$ bezüglich $S$ definiert durch

$$\gamma_{G,S} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \; \gamma_{G,S}(n) = |B_S(n)|$$

(De la Harpe S.151 VI.1)

**1.3 Beispiel** Die Wachstumsfunktion von $\mathbb{Z}$ bezüglich $S = \{1\}$ ist gegeben durch $\gamma_{\mathbb{Z},S}(n) = 2n + 1$.

## 1.2 Arten des Wachstums von Gruppen

**1.4 Definition** Seien $f_1, f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ zwei monoton steigende Funktionen. Dann schreibe $f_1 \preceq f_2$, falls Konstanten $a, b \in \mathbb{N}$ existieren, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f_1(n) \leq a * f_2(b * n)$$

Schreibe $f_1 \sim f_2$, wenn $f_1 \preceq f_2$ und $f_2 \preceq f_1$ gelten. Dann heißen $f_1$ und $f_2$ *äquivalent.*

(De la Harpe S. 168/169 VI.22-25)

**1.5 Lemma** Für eine Gruppe G und zwei endliche Erzeugendensysteme $S_1$ und $S_2$ für G gilt immer $\gamma_{G,S_1} \sim \gamma_{G,S_2}$

(De la Harpe S.171 VI.32)

**Beweis** Setze $a = \max\{l_{S_2}(s) \mid s \in S_1\}$ und $b = \max\{l_{S_1}(s) \mid s \in S_2\}$.
Dann ist schon $B_{S_1}(n) \subseteq B_{S_2}(an)$, da für $g \in B_{s_1}(n)$ mit $g = s_1...s_k$ für $s_j \in S_1$ und $k = l_{S_1}(g) \leq n$ gilt $l_{S_2}(s_j) \leq a$, also $l_{S_2}(g) \leq ka \leq na$.
Die andere Richtung gilt analog.

**1.6 Definition** Sei $G$ endlich erzeugt und $\gamma$ eine Wachstumsfunktion von G.

(i) Falls $\gamma(n) \sim exp(n)$ so sagt man, das Wachstum von G ist *exponentiell.*
(ii) Falls $a \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass $\gamma(n) \sim n^a$ ist, so sagt man das Wachstum von G ist *polynomiell.*
(iii) Falls $\gamma(n) \nsim exp(n)$ und $\gamma(n) \nsim n^a$ für alle $a \in \mathbb{N}_0$, so sagt man G hat *mittleres Wachstum.*

Wenn wir nur wissen, dass $\gamma(n) \nsim exp(n)$, dann sagt man $G$ wächst *subexponentiell.*

(De la Harpe S.180/81 VI.51)

**1.7 Fekete Lemma** Sei $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine *subadditive* Funktion, d.h. $\forall k, l \in \mathbb{N}\ \alpha(k+l) \leq \alpha(k) + \alpha(l)$. Dann gilt:

$$L \coloneqq \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha(k)}{k} = \inf_{k\geq 1} \frac{\alpha(k)}{k} < \infty$$

Zusätzlich gilt $\forall k \in \mathbb{N}$: $kL \leq \alpha(k) \leq k\alpha(1)$.

**Beweis** Sei $a \in \mathbb{N}$. Jedes $k \in \mathbb{N}$ lässt sich schreiben als $k = qa + r$, wobei $q \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, ..., a-1\}$. Es gilt wegen der Subadditivität: $\frac{\alpha(k)}{k} \leq \frac{q\alpha(k)+\alpha(r)}{qa+r}$, für $q = 0$ also $\frac{\alpha(k)}{k} \leq \frac{\alpha(r)}{r}$ und für $q > 0$ gilt $\frac{\alpha(k)}{k} \leq \frac{q\alpha(a)}{qa} + \frac{\alpha(r)}{qa}$. Für den Limes gilt also:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha(k)}{k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha(a)}{a} + \frac{\alpha(r)}{qa} = \frac{\alpha(a)}{a}$$

Hierbei ist $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\alpha(r)}{qa} = 0$, da $r \in \{0, ..., a-1\}$, aber $qa \to \infty$.

Da die Abschätzung für jedes $a \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung. Die Zusatzbehauptung erhält man so:
Sei $k \in \mathbb{N}_0$ fest. $kL = k \inf\limits_{j\geq 1} \frac{\alpha(j)}{j} \leq k\frac{\alpha(k)}{k} = \alpha(k)$ und wegen der Subadditivität folgt: $\alpha(k) = \alpha(1 + ... + 1) \leq k\alpha(1)$.

**1.8 Folgerung** Sei $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine *submultiplikative* Funktion, d.h. $\forall k, l \in \mathbb{N}\ \beta(k+l) \leq \beta(k)\beta(l)$. Dann gilt:

$$\Lambda \coloneqq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\beta(k)} = \inf_{k\geq 1} \sqrt[k]{\beta(k)} < \infty$$

Weiter gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$: $\Lambda^k \leq \beta(k) \leq \beta(1)^k$

**Beweis** Die Funktion $\alpha(k) \coloneqq \log(\beta(k))$ ist subadditiv:

$$\forall k, l \in \mathbb{N} : \log(\beta(k+l)) \leq \log(\beta(k)\beta(l)) = \log(\beta(k)) + \log(\beta(l)).$$

Also gilt

$$\lim_{k\to\infty} \log((\beta(k))^{\frac{1}{k}}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log(\beta(k))}{k} = \inf_{k\geq 1} \frac{\log(\beta(k))}{k} = \inf_{k\geq 1} \log((\beta(k))^{\frac{1}{k}}) < \infty,$$

und damit auch $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\beta(k)} = \inf\limits_{k\geq 1} \sqrt[k]{\beta(k)} < \infty$.
Dann gilt auch:

$$\forall k \in \mathbb{N} : k \log(\Lambda) = \log(\Lambda^k) \leq \log(\beta(k)) \leq k \log(\beta(1)) = \log(\beta(1)^k),$$

d.h. $\Lambda^k \leq \beta(k) \leq \beta(1)^k$.

(de la Harpe S.183/84 VI.56)

**1.9 Bemerkung** Die Wachstumsfunktion $\gamma$ einer endlich erzeugten Gruppe $G$ ist submultiplikativ.

(De La Harpe S.154 VI.3(ii))

**Beweis** Sei $l$ die Längefunktion und $\gamma$ die Wachstumsfunktion bzgl. eines endlichen Erzeugendensystems von G. Seien $k, l \in \mathbb{N}$. $\gamma(k + l) = |B(k + l)| = |\{g \in G | l(g) \leq k + l\}|$.

Für $g \in B(k + l)$ existieren $h_1 \in B(k)$ und $h_2 \in B(l)$ mit $g = h_1 h_2$.
Für alle $h_1 \in B(k)$ und $h_2 \in B(l)$ gilt umgekehrt natürlich auch $l(h_1 h_2) \leq k + l$.

Es gilt also $B(k + l) = \{h_1 h_2 | h_1 \in B(k), h_2 \in B(l)\}$, d.h.
$\gamma(k + l) = |B(k + l)| = |\{h_1 h_2 | h_1 \in B(k), h_2 \in B(l)\}| \leq |B(k)||B(l)| = \gamma(k)\gamma(l)$

**1.10 Bemerkung** Wenn $G$ exponentiell wächst, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_{G,S}(n)^{\frac{1}{n}} > 1$.

**Beweis** Sei $\gamma$ die Wachstumsfunktion von G, mit $\gamma \sim e^n$.
Es existieren Konstanten $a, b > 0$ mit $e^n \leq a\gamma(bn)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\gamma(bn) \geq \frac{1}{a} e^n$.
Setze in diese Gleichung ein: $n = [\frac{1}{b} k]$ Dann ist

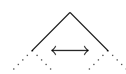
$\gamma(k) \geq \gamma(k[\frac{1}{b} k]) \geq \frac{1}{a} e^{[\frac{1}{b} k]}$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$. D.h.

$\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(n)^{\frac{1}{n}} \geq \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{a} e^{[\frac{1}{b} n]})^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{[\frac{1}{b} n]}{n}} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} > 1$, da $\frac{1}{b} > 0$ und für große n gilt $[\frac{1}{b} n] \geq 1$.

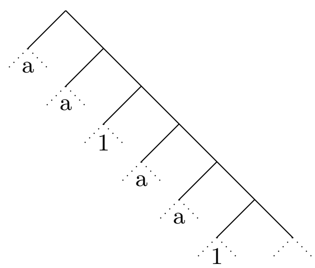
# 2 Definition und Notationen zur Grigorchuk Gruppe

## 2.1 Die Grigorchuk Gruppe

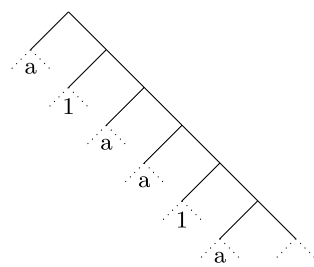
Die Grigorchuk Gruppe $G = \langle\ a, b, c, d\ \rangle$ ist die Gruppe, deren Elemente Automorhismen des unendlichen Binärbaumes sind und deren Erzeuger wie folgt definiert sind:



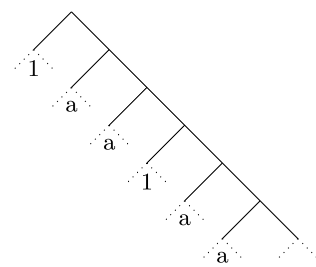
a




b




c




d

**2.1 Bemerkung** Es gelten:
$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1,\ bc = cb = d,\ cd = dc = b,\ bd = db = c.$
Folglich ist die Untergruppe $H = \langle\ b, c, d\ \rangle$ endlich und isomorph zur Kleinschen Vierergruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

## 2.2 Einige Notationen

**2.2 Definition** Bezeichne mit $St(n)$ die Untergruppe, die aus allen Elementen von $G$ besteht, die den Baum bis zum n-ten Level fixieren.

**2.3 Beobachtung** Es gilt $St(1) = \langle aba, aca, ada, b, c, d\rangle = \langle b, c, aba, aca\rangle$.

**Erklärung** Es ist klar, dass jedes Element von $St(1)$ eine gerade Anzahl an a's enthalten muss, damit das erste Level fixiert wird. Dies ist die einzige Bedingung für Elemente aus St(1).
Man sieht, dass alle als Erzeuger genannten Elemente eine gerade Anzahl a's enthalten und somit auch alle Kombinationen dieser Elemente, weil a's nur in Form von $a^2 = 1$ gekürzt werden können.

Umgekehrt noch zu zeigen: alle Elemente in $St(1)$, bzw. Elemente, die eine gerade Anzahl an a's enthalten sind bereits erzeugt von $b, c, aba, aca$. Sei $g \in St(1)$. Dann hat g eine gerade Anzahl von a's und wegen $a^2 = 1$, sowie $bc = cb = d$, usw können wir $g$ auf die folgende Form bringen:

$$g = a^{e_0} x_1 a x_2 a ... a x_n a^{e_1},$$

wobei $e_0, e_1 \in \{0, 1\}$, $x_1, ..., x_n \in \{b, c, d\}$, und $n \in \mathbb{N}_0$ *ungerade*, falls $e_0 = e_1$, sonst n *gerade*.
Da wir wissen, dass g eine gerade Anzahl an a's enthält ist g also zusammengesetzt aus den oben genannten Erzeugern: Nehme immer von einer Seite einen "Baustein" weg, es kann am Ende höchstens ein einzelnes a übrig bleiben, dann wäre jedoch die Anzahl insgesamt ungerade. Somit ist g zusammengesetzt aus den oben genannten Erzeugern.

# 3 Das Wachstum der Grigorchuk Gruppe

Ziel des folgenden Abschnitts ist zu zeigen, dass die Grigorchuk Gruppe subexponentielles Wachstum hat. (Giederung ab hier wie in der Ausarbeitung von Prof. Dr. Oleg Bogopolski, s. Anhang, ähnlich wie bei De La Harpe S.249-251, VIII.59-61)

## 3.1 Einige Vorbereitungen

**3.1 Definition** Sei $S^*$ die von $a, b, c, d$ erzeugte, freie Halbgruppe.
Sei $S^*_{gerade}$ die Untergruppe von $S^*$, deren Elemente eine gerade Anzahl an a's enthalten. Es gibt natürliche, surjektive Homomorphismen von $S^*$ auf $G$ und von $S^*_{gerade}$ auf $St(1)$. Das bedeutet, jedes Element $g \in G$ kann durch ein Element in $S^*$ ausgedrückt werden, da jeder Erzeuger die Ordnung 2 hat und somit sein eigenes Inverses ist. Genauso bei $S^*_{gerade}$ und $St(1)$. Definiere nun einen Homomorphismus $\phi : S^*_{gerade} \to S^* \times S^*$, $\phi(x) \mapsto (\phi_0(x), \phi_1(x))$ durch die Vorgaben:

$$\begin{aligned} \phi(b) &= (a,c), & \phi(aba) &= (c,a) \\ \phi(c) &= (a,d), & \phi(aca) &= (d,a) \\ \phi(d) &= (1,b), & \phi(ada) &= (b,1) \end{aligned} \tag{i}$$

**Notation** Sei im Folgenden $w \in S^*$ ein Wort, mit der Eigenschaft, dass der Automorphismus $g \in G$, den $w$ repräsentiert in $St(3)$ liegt. Das heißt insbesondere gilt: $g$ enthält eine gerade Anzahl an a's und damit enthält auch $w$ eine gerade Anzahl a's.

**3.2 Definition/Beobachtung** *Umformungen von Typ 1* sind: $bc = cb \rightsquigarrow d,\ cd = dc \rightsquigarrow b,\ bd = db \rightsquigarrow c.$
Die *Umformungen von Typ 2* sind: $a^2 \rightsquigarrow 1,\ b^2 \rightsquigarrow 1,\ c^2 \rightsquigarrow 1, d^2 \rightsquigarrow 1$
Sei $|w|$ die Länge von $w$. Sei $|w|_a$ die Anzahl an a's in $w$, sowie $|w|_{b,c}$ für die Anzahl an b's und c's, usw.

$w$ lässt sich durch Umformungen von Typ 1 und 2 auf die folgende Form bringen:

$$w = a^{e_0} x_1 a x_2 a ... a x_n a^{e_1}, \tag{ii}$$

wobei $e_0, e_1 \in \{0,1\},\ x_1, ..., x_n \in \{b,c,d\}$,
und $n \in \mathbb{N}_0$ **ungerade**, falls $e_0 = e_1$, sonst $n$ **gerade**.

**3.3 Behauptung** Wenn $w$ reduziert ist, gilt:

$$\frac{|w|-1}{2} \leq |w|_{b,c,d} \leq \frac{|w|+1}{2} \tag{iii}$$

**Beweis** Das folgt direkt aus der reduzierten Form von $w$ wie in $(ii)$.

**3.4 Definition** Sei $\tau_i(w)$ die Anzahl der Umformungen vom Typ $i = 1, 2$, die durchgeführt werden müssen, um zur reduzierten Form von $w$ zu gelangen.
Sei $w^\bullet$ die reduzierte Form von $w$.
Sei $\rho(w) = \tau_1(w) + 2\tau_2(w)$ die Anzahl von *gewichteten Reduktionen* von $w$.
Sei $\rho_1(w) = \rho(\phi_0(w)) + \rho(\phi_1(w))$.

**3.5 Behauptung** Es gelten:

$$|w^\bullet|_d \geq |w|_d - \rho(w) \tag{iv}$$
$$|w^\bullet|_{c,d} \geq |w|_{c,d} - 2\rho(w) \tag{v}$$

**Beweis** Zu (1): Wenn ein d durch eine Umformung verschwindet, wird $\rho(w)$ entweder um eins (Typ 1) oder um zwei (Typ 2) größer.
Zu (2): Da durch die Umformung $cd = dc \rightsquigarrow b$ die linke Seite um zwei weniger wird, aber die rechte nur um eins, kommt der Faktor zwei zustande.

**3.6 Definition** Schreibe $\phi_i^\bullet(w) = (\phi_i(w))^\bullet$.

**3.7 Behauptung** Es gelten:

$$|\phi_0(w)|_d + |\phi_1(w)|_d = |w|_c \tag{vi}$$
$$|\phi_0^\bullet(w)|_d + |\phi_1^\bullet(w)|_d \geq |w|_c - 2\rho_1(w) \tag{vii}$$

**Beweis** Zu (vi): Folgt direkt aus der Definition von $\phi$, siehe (i).
Zu (vii): nach (iv) gilt: $|\phi_0^\bullet(w)|_d + |\phi_1 \bullet(w)|_d \geq |\phi_0(w)|_d + |\phi_1(w)|_d - \rho(\phi_0(w)) - \rho(\phi_1(w))$.
Nach (vi) ist die rechte Seite gleich $|w|_c - \rho_1(w) \geq |w|_c - 2\rho_1(w)$.

## 3.2 Das Hauptlemma

**3.8 Lemma** (entspricht De la Harpe S.249 VIII.59)
Sei $w \in S^*$ ein *reduziertes* Wort welches mit einem Automorphismus $g \in St(3)$ korrespondiert, d.h. $g$ fixiert alle Punkte bis zum dritten Level. Dann gilt:

$$\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} |\phi_i^\bullet(\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet(w)))| \leq \frac{3}{4}|w| + 8 \tag{$\star$}$$

**Beweis** Um das Hauptlemma zu beweisen, beweisen wir zuerst die folgenden Behauptungen 1-5 über $w$.

**Behauptung 1** Es gelten:

$$|\phi_0(w)| + |\phi_1(w)| \leq |w| + 1 - |w|_d \tag{1}$$
$$|\phi_0^\bullet(w)| + |\phi_1^\bullet(w)| \leq |w| + 1 - |w|_d - \rho_1(w) \tag{$1^\bullet$}$$

**Beweis** Zu (1): nach (i) ist $w$ von der Form $w = a^{e_0}x_1...x_n a^{e_1}$, wobei n ungerade, falls $e_0 = e_1$, sonst n gerade und $e_0, e_1 \in \{0, 1\}$. das heißt $\phi(w)$ hat eine der vier Formen:

$$\phi(w) = \phi(x_1)\phi(ax_2a)...\phi(ax_{n-1}a)\phi(x_n), \qquad e_0 = e_1 = 0 \tag{1}$$
$$\phi(w) = \phi(ax_1a)\phi(x_2)...\phi(x_{n-1})\phi(ax_na) \qquad e_0 = e_1 = 1 \tag{2}$$
$$\phi(w) = \phi(x_1)\phi(ax_2a)...\phi(x_{n-1})\phi(ax_na) \qquad e_0 = 0, e_1 = 1 \tag{3}$$
$$\phi(w) = \phi(ax_1a)\phi(x_2)...\phi(ax_{n-1}a)\phi(x_n) \qquad e_0 = 1, e_1 = 0 \tag{4}$$

Für jedes $d$ welches in $w$ enthalten ist, erhalten wir auf der linken Seite der Gleichung (1) einmal -1, weil $\phi(d) = (1, b)$ und $\phi(ada) = (d, 1)$, so kommt auf der rechten Seite $-|w|_d$ zustande. Die Länge von $\phi_i(w),\ i = 0, 1$ ist jeweils maximal $n$, siehe Definition von $\phi$. Es gilt jedoch: die Länge von $|w|$ ist:
Fall 1: $n + (n - 1) = 2n - 1$, wegen $x_1, ..., x_n$ und (n-1)-mal a
Fall 2: $n + (n + 1) = 2n + 1$, wegen $x_1, ..., x_n$ und (n+1)-mal a
Fall 3: $n + n = 2n$, wegen $x_1, ..., x_n$ und n-mal a
Fall 4: $n + n = 2n$, wegen $x_1, ..., x_n$ und n-mal a
Wegen Fall 2 muss also auf der rechten Seite der Gleichung in (1) +1 hinzugefügt werden.

Zu ($1^\bullet$): Folgt sofort aus (1) mit der Definition von $\rho_1$.

**Behauptung 2** Es gelten:

$$|\phi_0(w)|_{c,d} + |\phi_1(w)|_{c,d} = |w|_{b,c} \tag{2}$$
$$|\phi_0^\bullet(w)|_{c,d} + |\phi_1^\bullet(w)|_{c,d} \geq |w|_{b,c} - 2\rho_1 \geq \frac{|w| - 1}{2} - |w|_d - 2\rho_1 \tag{$2^\bullet$}$$

**Beweis** (2) folgt direkt aus der Definition von $\phi$, siehe (i):

$$\phi(b) = (a, c) \qquad \phi(c) = (a, d) \qquad \phi(aba) = (c, a) \qquad \phi(aca) = (d, a)$$

Die erste Ungleichung in ($2^\bullet$) folgt direkt aus (2). Aus (v) und (iii) erhalten wir

$$|w|_{b,c} - 2\rho_1 = |w|_{b,c,d} - |w|_d - 2\rho_1 \geq \frac{|w|-1}{2} - |w|_d - 2\rho_1.$$

**Definition** Für die nächste Behauptung führen wir ein:

$$\rho_2 := \rho(\phi_0(\phi_0^\bullet(w))) + \rho(\phi_1(\phi_0^\bullet(w))) + \rho(\phi_0(\phi_1^\bullet(w))) + \rho(\phi_1(\phi_1^\bullet(w))) = \rho_1(\phi_0^\bullet(w)) + \rho_1(\phi_1^\bullet(w))$$

**Behauptung 3** Es gilt:

$$\sum_{i,j\in\{0,1\}} |\phi_i^\bullet(\phi_j^\bullet(w))| \leq |w| + 3 - |w|_d - \rho_1 - |\phi_0^\bullet(w)|_d - |\phi_1^\bullet(w)|_d - \rho_2 \tag{3}$$

**Beweis** Mit zweimaliger Anwendung von ($1^\bullet$) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in\{0,1\}} |\phi_i^\bullet(\phi_j^\bullet(w))| &= \sum_{j\in\{0,1\}} |\phi_0^\bullet(\phi_j^\bullet(w))| + |\phi_1^\bullet(\phi_j^\bullet(w))| \\
&\overset{(1^\bullet)}{\leq} \sum_{j\in\{0,1\}} (|\phi_j^\bullet(w)| + 1 - |\phi_j^\bullet(w)|_d - \rho_1(\phi_j^\bullet(w))) \\
&= |\phi_0^\bullet(w)| + |\phi_1^\bullet(w)| + 2 - |\phi_0^\bullet(w)|_d - |\phi_1^\bullet(w)|_d \\
&\quad - (\rho_1(\phi_0^\bullet(w)) + \rho_1(\phi_1^\bullet(w))) \\
&= |\phi_0^\bullet(w)| + |\phi_1^\bullet(w)| + 2 - |\phi_0^\bullet(w)|_d - |\phi_1^\bullet(w)|_d - \rho_2 \\
&\overset{(1^\bullet)}{\leq} |w| + 3 - |w|_d - |\phi_0^\bullet(w)|_d - |\phi_1^\bullet(w)|_d - \rho_2.
\end{aligned}$$

**Behauptung 4** Es gilt:

$$\sum_{i,j\in\{0,1\}} |\phi_i^\bullet(\phi_j^\bullet(w))|_d \geq \frac{|w|-1}{2} - |w|_d - 2\rho_1 - |\phi_0^\bullet(w)|_d - |\phi_1^\bullet(w)|_d - 2\rho_2 \tag{4}$$

**Beweis** Durch Anwenden von (vii) und ($2^\bullet$) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in\{0,1\}} |\phi_i^\bullet(\phi_j^\bullet(w))|_d &= \sum_{j\in\{0,1\}} |\phi_0^\bullet(\phi_j^\bullet(w))| + |\phi_1^\bullet(\phi_j^\bullet(w))| \\
&\overset{\text{(vii)}}{\geq} \sum_{j\in\{0,1\}} (|\phi_j^\bullet(w)|_c - 2\rho_1(\phi_j^\bullet(w))) \\
&= |\phi_0^\bullet(w)|_c + |\phi_1^\bullet(w)|_c - 2(\rho_1(\phi_0^\bullet(w)) + \rho_1(\phi_1^\bullet(w))) \\
&= |\phi_0^\bullet(w)|_c + |\phi_1^\bullet(w)|_c - 2\rho_2 \\
&= |\phi_0^\bullet(w)|_{c,d} + |\phi_1^\bullet(w)|_{c,d} - |\phi_0^\bullet(w)|_d - |\phi_1^\bullet(w)|_d - 2\rho_2 \\
&\overset{(2^\bullet)}{\geq} \frac{|w|-1}{2} - |w|_d - 2\rho_1 - |\phi_0^\bullet(w)|_d - |\phi_1^\bullet(w)|_d - 2\rho_2.
\end{aligned}$$

**Behauptung 5** Es gilt

$$\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} |\phi_i^\bullet(\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet((w)))| \leq \frac{|w|}{2} + 8 + \rho_1 + \rho_2 \tag{5}$$

**Beweis** Bezeichne mit L die linke und R die rechte Seite der Ungleichung.
Wir benutzen (1),(3),(4):

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{j,k\in\{0,1\}} |\phi_0^\bullet(\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet((w)))| + |\phi_1^\bullet(\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet((w)))| \\
&\overset{(1)}{\leq} \sum_{j,k\in\{0,1\}} |\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet(w))| + 1 - |\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet(w))|_d \\
&= \left(\sum_{j,k\in\{0,1\}} |\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet(w))|\right) - \left(\sum_{j,k\in\{0,1\}} |\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet(w))|_d\right) + 4 \\
&\overset{(3),(4)}{\leq} |w| + 3 - |w|_d - \rho_1 - |\phi_0^\bullet(w)|_d - |\phi_1^\bullet(w)|_d - \rho_2 - \frac{|w|-1}{2} \\
&\quad + |w|_d + 2\rho_1 + |\phi_0^\bullet(w)|_d + |\phi_1^\bullet(w)|_d + 2\rho_2 + 4 \\
&= \frac{2|w|}{2} - \frac{|w|-1}{2} + \rho_1 + \rho_2 + 7 \\
&= \frac{|w|}{2} + \frac{1}{2} + 7 + \rho_1 + \rho_2 \leq R
\end{aligned}$$

Jetzt beweisen wir das Lemma 1. Falls $\rho_1 + \rho_2 \leq \frac{|w|}{4}$, so folgt sofort aus (5) die Behauptung. Sei nun $\rho_1 + \rho_2 > \frac{|w|}{4}$. Nach (3) gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in\{0,1\}} |\phi_i^\bullet(\phi_j^\bullet(w))| &\leq |w| + 3 - |w|_d - \rho_1 - |\phi_0^\bullet(w)|_d - |\phi_1^\bullet(w)|_d \\
&\leq |w| + 3 - \frac{|w|}{4} \\
&= \frac{3}{4}|w| + 3
\end{aligned} \tag{6}$$

Jetzt folgt mit (1) und (6):

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} |\phi_i^\bullet(\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet((w)))| &= \sum_{j,k\in\{0,1\}} |\phi_0^\bullet(\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet((w)))| + |\phi_1^\bullet(\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet((w)))| \\
&\overset{(1)}{\leq} \sum_{j,k\in\{0,1\}} |\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet(w))| + 1 - |\phi_j^\bullet(\phi_k^\bullet(w))|_d \\
&\overset{(6)}{\leq} \frac{3}{4}|w| + 7
\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. $\square$

**Notation** Für ein $g \in St(3)$ und $i,j,k \in \{0,1\}$ sei $g_{i,j,k}$ der Automorphismus der durch $g$ auf dem Unterbaum mit Wurzel in $(i,j,k)$ induziert wird. Wir können $g_{i,j,k}$ als Element von $G$ auffassen. Sei $l_S(g)$ die Länge von G bzgl. $S = \{a,b,c,d\}$.

**3.9 Korollar** Für $g \in St(3)$ gilt:

$$\sum_{i,j,k \in \{0,1\}} l_S(g_{i,j,k}) \leq \frac{3}{4} l_S(g) + 8$$

Das erhalten wir durch Anwendung von Lemma 1. Für das Wort $w \in S^*_{gerade}$, das dem Automorphismus $g$ entspricht, ist die dreifache Anwendung von $\phi^\bullet$ wohldefiniert, wegen $g \in St(3)$. Die Länge von $g$ entspricht dabei der Länge des Wortes $w$ und die Länge $l_S(g_{i,j,k})$ entspricht der Länge des Wortes $|\phi^\bullet_i(\phi^\bullet_j(\phi^\bullet_k((w)))|$

## 3.3 Die Grigorchuk Gruppe hat subexponentielles Wachstum

**3.10 Lemma** (Entspricht De la Harpe S.251 V.III.60)
Sei $G$ eine beliebige Gruppe mit endlichem Erzeugendensystem $S$. Sei $G_0$ eine Untergruppe von $G$ mit $|G : G_0| = m$. Sei $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Wachstumsfunktion von G bzgl. S, d.h.

$$\beta(k) = |\{g \in G | l_S(g) \leq k\}|$$

wobei $l_S$ die Längefunktion von $G$ bzgl $S$ sei. Sei $\beta_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\beta_0(k) = |\{g \in G_0 | l_S \leq k\}|$$

(Beachte: $\beta_0$ ist keine Wachstumsfunktion für $G_0$!) Dann gilt:

$$\beta(k) \leq m\beta_0(k + m - 1)$$

**Beweis** (nach De La Harpe) Die Menge der Rechtsnebenklassen von $G_0$,
$G_0 \backslash G = \{G_0 g | g \in G\}$ ist ein metrischer Raum bzgl. der Metrik

$$d(G_0 x, G_0 y) = inf\{l_S(x^{-1}hy) | h \in G_0\}$$

Überprüfe: Für $x \in G$ gilt $d(G_0 x, G_0 x) = 0$, $\forall x, y \in G$ ist

$$\begin{aligned} d(G_0 x, G_0 y) &= inf\{l_S(x^{-1}hy) | h \in G_0\} \\ &= inf\{l_S((x^{-1}hy)^{-1}) | h \in G_0\} \\ &= inf\{l_S(y^{-1}h^{-1}x) | h \in G_0\} \\ &= inf\{l_S(y^{-1}hx) | h \in G_0\} = d(G_0 y, G_0 x) \end{aligned}$$

und $\forall x, y, z \in G$, mit $h_1, h_2 \in G_0$,s.d.
$l_S(x^{-1}h_1 z) = inf\{l_S(x^{-1}hz) | h \in G_0\}$ und

$l_S(z^{-1}h_2y) = inf\{l_S(z^{-1}hy)|h \in G_0\}$ gilt:

$$\begin{aligned} d(G_0x, G_0z) + d(G_0z, G_0y) &= inf\{l_S(x^{-1}hz)|h \in G_0\} + inf\{l_S(z^{-1}hy)|h \in G_0\} \\ &= l_S(x^{-1}h_1z) + l_S(z^{-1}h_2y) \\ &\geq l_S(x^{-1}h_1zz^{-1}h_2y) = l_S(x^{-1}h_1h_2y) \\ &\geq inf\{l_S(x^{-1}hy)|h \in G_0\} = d(G_0x, G_0y) \end{aligned}$$

Da $S$ $G$ erzeugt, können zwei Elemente $x, y \in G_0\backslash G$ durch eine Kette $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ mit $d(x_{j-1}, x_j) = 1$, $j \in \{1, ..., n\}$ verbunden werden.

Begründung: Sei $T = \{1 = x_1, ..., x_m\}$ ein Rechtsvertreter-System für $G_0$ in $G$, d.h. $G_0\backslash G = \{G_0x_1, ..., G_0x_m\}$. Nach Algebra werden die Rechts-Nebenklassen durch Rechtsmultiplikation mit einem Element aus $G$ *permutiert*, d.h. $\forall i \in \{1, ..., m\}$, $s \in S$ $\exists j \in \{1, ..., m\} : G_0x_is = G_0x_j$. Das heißt, $x_isx_j^{-1} \in G_0$. Also ist schon

$$\begin{aligned} d(G_0x_i, G_0x_j) &= inf\{l(x_i^{-1}hx_j)|h \in G_0\} \\ &= l(x_i^{-1}x_isx_j^{-1}x_j) = 1 \end{aligned}$$

Wegen $|G : G_0| = m$ und der Dreiecksungleichung gilt daher:
für $x, y \in G_0\backslash G : d(x, y) \leq m - 1$. Deshalb kann man Repräsentanten $d_1, ..., d_m \in G$ wählen, sodass $\{d_1, ..., d_m\}$ ein Rechtsvertreter-System für G ist, d.h. $\{d_1^{-1}, ..., d_m^{-1}\}$ ist ein Linksvertreter-System und zusätzlich für jedes j gilt:
$l_S(d_j) \leq j - 1$ (beginne mit $d_1 = 1$, usw.). Dann gilt für jedes $g \in G$: $g = d_j^{-1}h$, für ein $h \in G_0$ und ein $j \in \{1, ..., m\}$. Damit erhalte:

$$l_S(g) \leq l_S(d_j) + l_S(h) \leq j - 1 + l_S(h)$$

Da jedes solche $h$ nun für höchstens m verschiedene Elemente in G verwendet werden kann, folgt für $k \in \mathbb{N}$:

$$|\{g \in G \mid l_S(g) \leq k\}| \leq m|\{h \in G_0 \mid l_S(h) \leq k + m - 1\}|$$

□

**3.11 Satz (Grigorchuk)** (Entspricht De la Harpe S.252 VIII.61) Die Grigorchuk-Gruppe G hat subexponentielles Wachstum.

**Beweis** Für die Untergruppe $G_0 = St(3) \leq G$ gilt $m := |G : G_0| = 2^7$. Erklärung: $|G : St(3)| = |G : St(1)||St(1) : St(2)||St(2) : St(3)| = 2^1 2^2 2^4 = 2^7$.

Veranschaulichung am Baum: Betrachte jeweils die Kanten zwischen zwei Leveln (von der Wurzel bis Level 3); Zähle dann die Anzahl an möglichen Anordnungen der Kanten.
Zwischen Wurzel und Level 1: nur 2 mögliche Anordnungen: (1,2) und (2,1),
zwischen Level 1 und 2 genau vier verschiedene Anordnungen ohne Level 1 zu ändern: ((1,2),(3,4)), ((1,2),(4,3)),((2,1),(3,4)),((2,1),(4,3)),
zwischen Level 2 und 3 genau 16 verschiedene Anordnungen ohne Level 1 und 2 zu ändern: ((1,2),(3,4),(5,6),(7,8)), ((1,2),(4,3),(5,6),(7,8)), usw.

(Das zeigt zwar nur "$\leq 2^7$", aber das reicht auch für die weiteren Berechnungen)

**Notation** Wir setzen jetzt $\omega = \lim_{n\to\infty} \beta(n)^{\frac{1}{n}}$. Dann genügt es nach 1.10 zu zeigen, dass $\omega \leq 1$. Wegen 1.8 und 1.9 wissen wir schon, dass

$$\forall k \in \mathbb{N} : \omega^k \leq \beta(k) \leq \beta(1)^k.$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Nach 1.7 und 1.8 ist $\omega < \infty$ und wir finden $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$\omega - \epsilon \leq \sqrt[k]{\beta(k)} \leq \omega + \epsilon \Leftrightarrow (\omega - \epsilon)^k \leq \beta(k) \leq (\omega + \epsilon)^k$$

Für $C := \beta(k_0)$ gilt dann für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\beta(k) \leq C(\omega + \epsilon)^k, \tag{$\star$}$$

weil $(\omega + \epsilon) > 1$, wegen $\omega \geq 1$ und $\beta(k_0) \geq 1$.

Für jedes $g \in St(3)$ ist g eindeutig bestimmt durch die induzierten Automorphismen $g_{i,j,k}$ mit $i, j, k \in \{0, 1\}$. Jedes $g \in St(3)$ **mit** $l_S(g) \leq n$ erfüllt nach dem Korollar 3.9 die Eigenschaft $\sum_{i,j,k\in\{0,1\}} l_S(g_{i,j,k}) \leq \frac{3}{4}n + 8$. Deshalb gilt:

$$\{\, g \in St(3) \mid l_S(g) \leq n \,\} \subseteq \{\, g \in G \mid \sum_{i,j,k\in\{0,1\}} l_S(g_{i,j,k}) \leq \frac{3}{4}n + 8 \,\}$$

Weiter ist

$$|\{\, g \in G \mid \sum_{i,j,k\in\{0,1\}} l_S(g_{i,j,k}) \leq \frac{3}{4}n + 8 \,\}| = \sum_{n_1+\ldots+n_8 \leq \frac{3}{4}n+8} |B(n_1)| * \ldots * |B(n_8)|$$

Begründung: Für jedes $g$ aus der Menge kann man $h_1 \in B(n_1)$ wählen, ein $h_2 \in B(n_2)$, usw. mit $g_{0,0,0} = h_1$, $g_{0,0,1} = h_2$, usw. für $n_1, \ldots, n_8 \in \mathbb{N}_0$ mit $n_1 + \ldots + n_8 \leq \frac{3}{4}n + 8$. Das heißt für jede Menge $\{n_1, ..., n_8\}$ mit $n_1 + ... + n_8 \leq \frac{3}{4}n + 8$ gibt es höchstens $|B(n_1)| * ... * |B(n_8)|$ Möglichkeiten.

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\beta_0(n) &\leq \sum_{n_1+...+n_8 \leq \frac{3}{4}n+8} \beta(n_1)...\beta(n_8) \\
&\overset{(\star)}{\leq} \sum_{n_1+...+n_8 \leq \frac{3}{4}n+8} C * (\omega + \epsilon)^{n_1} * ... * C * (\omega + \epsilon)^{n_8} \\
&= \sum_{n_1+...+n_8 \leq \frac{3}{4}n+8} C^8 * (\omega + \epsilon)^{n_1+..+n_8} \\
&\leq C^8(\omega + \epsilon)^{\frac{3}{4}n+8} \sum_{n_1+...+n_8 \leq \frac{3}{4}n+8} 1 \\
&= C^8(\omega + \epsilon)^{\frac{3}{4}n+8} P(n),
\end{aligned}$$

wobei $P(n)$ ein geeignetes Polynom vom Grad 9 ist.

Nach Lemma 3.10 ist außerdem:

$$\begin{aligned}
\beta(n) &\leq 2^7 \beta_0(n + 2^7 - 1) \\
&\leq 2^7 C^8 (\omega + \epsilon)^{\frac{3}{4}(n+2^7-1)+8} P(n + 2^7 - 1) \\
&= 2^7 C^8 (\omega + \epsilon)^{\frac{3}{4}(2^7-1)+8} (\omega + \epsilon)^{\frac{3}{4}n} P(n + 2^7 - 1)
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{2^7 C^8 (\omega + \epsilon)^{\frac{3}{4}(2^7-1)+8} P(k + 2^7 - 1)} = 1$$

Also gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\beta(k)} \leq \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{(\omega + \epsilon)^{\frac{3}{4}k}} = (\omega + \epsilon)^{\frac{3}{4}}$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt daraus schon $\omega \leq \omega^{\frac{3}{4}}$, d.h. $\omega \leq 1$. $\square$