

Facetten der geometrischen Gruppentheorie Thompson-Gruppe F

Felix Michels

23. Juni 2020

Zusammenfassung

Die *Thompson-Gruppen* $F \subseteq V \subseteq T$ wurden 1965 von Richard Thompson beschrieben. Sie wurden ursprünglich als mögliche Gegenbeispiele zur Von Neumann Vermutung konstruiert. Seitdem sind die Thompson Gruppen umfassend untersucht worden und haben sich als Quelle vieler ungewöhnlicher Eigenschaften herausgestellt. Hier wollen wir nun vor allem die Gruppe F definieren und die einfachsten Aussagen über Rechenregeln sowie Erzeuger herleiten. Wir folgen dabei vor allem dem ersten Kapitel aus Belk [1].

1 Definition der Gruppe F

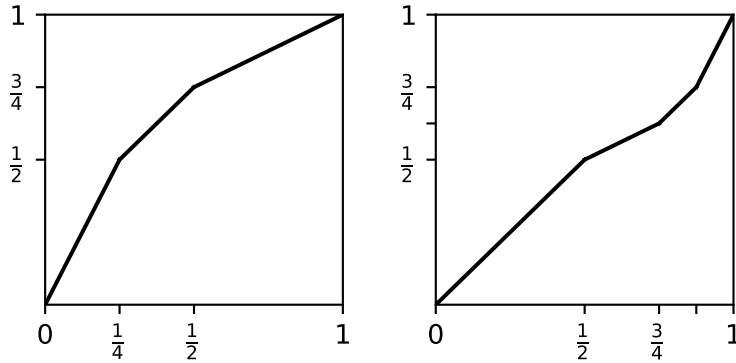
Definition 1.1. Ein *Standard dyadisches Intervall* ist ein Intervall der Form

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \text{ für } k, n \in \mathbb{N}$$

Eine Partition des Intervalls $[0, 1]$ in Standard dyadische Intervalle heißt *dyadische Unterteilung*.

Definition 1.2. Seien \mathcal{D} und \mathcal{R} zwei dyadische Unterteilungen der gleichen Größe. Man kann ihnen einen Homöomorphismus $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zuordnen, indem man jedes Intervall von \mathcal{D} linear auf das entsprechende Intervall von \mathcal{R} abbildet. Dies wird eine *dyadische Umordnung* genannt.

Beispiel 1.3. Folgende Graphen stellen zwei dyadische Umordnungen dar:



Dyadische Umordnungen können auch direkt durch einige ihrer Eigenschaften definiert werden.

Satz 1.4. Sei $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ein stückweise linearer, monoton wachsender Homöomorphismus. Dann ist f eine dyadische Umordnung genau dann, wenn

1. Alle Steigungen von f Zweierpotenzen sind, und
2. Alle Bruchpunkte von f dyadisch rationale Koordinaten haben, d.h. sie haben die Form $(\frac{k_1}{2^{n_1}}, \frac{k_2}{2^{n_2}})$ für $k_1, k_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

Beweis. Skizze:

Dass dyadische Umordnungen diese Eigenschaften haben ist klar. Für die Rückrichtung muss man weitere Bruchpunkte einfügen um dyadische Unterteilungen zu erhalten. \square

Definition 1.5. Die Thompson-Gruppe F ist die Menge aller dyadischer Umordnungen zusammen mit der Komposition.

Wir notieren die Komposition damit “umgekehrt“ zur üblichen Reihenfolge, d.h. für $f, g \in F$ bezeichnet fg die Funktion mit $(fg)(t) = g(f(t)) \forall t \in [0, 1]$.

Satz 1.6. F ist torsionsfrei, also auch unendlich.

Beweis. Sei $f \in F \setminus \{id\}$, dann existiert $t_0 := \inf \{t \in [0, 1] \mid f(t) \neq t\}$. f hat also eine bei t_0 rechtsseitige Ableitung von $s \neq 1$. Da f stetig ist, gilt $f(t_0) = t_0$, wegen der Kettenregel hat f^n also bei t_0 rechtsseitige Ableitung von s^n . Für $n > 0$ ist demnach $f \neq f^n$. \square

2 Baumdiagramme

Die Elemente von F können durch Paare von dyadischen Unterteilungen dargestellt werden. Eine andere Sichtweise von dyadischen Unterteilungen wird uns nun ermöglichen, F besser zu verstehen, und insbesondere im nächsten Abschnitt Erzeuger von F anzugeben.

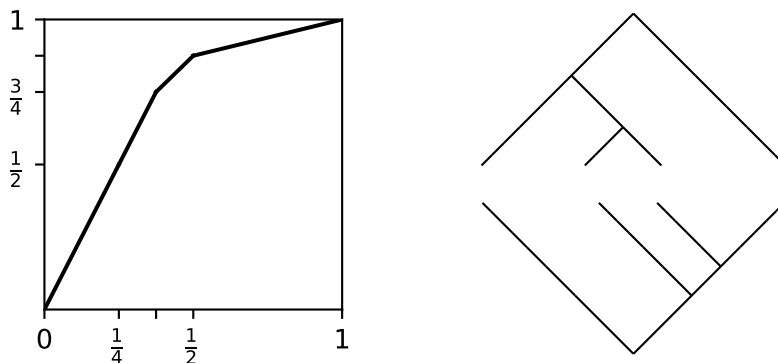
Definition 2.1. Dyadische Unterteilungen lassen sich konstruieren, indem man ein Teilintervall einer Unterteilung auswählt und dieses in zwei teilt. Dieses Vorgehen legt eine Darstellung als Binärbaum nahe: Wir repräsentieren die Unterteilungen als endliche Binärbäume, deren Knoten Standard dyadische Intervalle sind, wobei die Wurzel das Intervall $[0, 1]$ ist und ein Knoten $[a, b]$ entweder ein Blatt ist oder zwei Kinder $[a, \frac{1}{2}(b-a)]$ und $[\frac{1}{2}(b-a), b]$ hat.

Die Tiefe der Blätter entspricht der Länge des Teilintervalls, d.h. das Intervall eines Blatt der Tiefe n hat Länge 2^{-n} .

Auf diese Weise können wir die Elemente von F als Paare von Binärbäumen auffassen. Wir nennen diese Darstellung ein *Baumdiagramm*. Wir bezeichnen den Baum, der den Definitionsbereich beschreibt als *Quellbaum*, den anderen als *Zielbaum*. Dabei zeichnen wir den Quellbaum über dem Zielbaum.

Die Notation für eine dyadische Umordnung mit Quellbaum T und Zielbaum V ist dabei $\begin{bmatrix} T \\ V \end{bmatrix}$. Natürlich müssen T und V die gleiche Anzahl an Blättern haben.

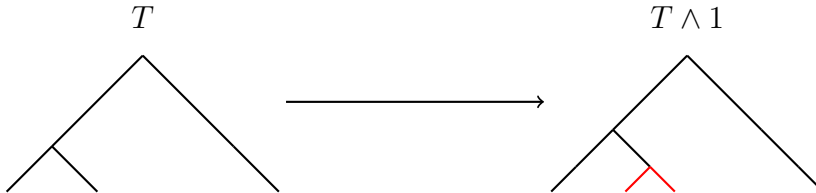
Beispiel 2.2. Hier ist ein Element von F zu sehen, links dargestellt als Funktionsgraph und rechts als Baumdiagramm.



Definition 2.3. Die *Weite* eines Binärbaums ist die Anzahl der Blätter minus 1. Für einen Binärbaum der Weite w nummerieren wir die Blätter von links nach rechts mit $0, 1, \dots, w$.

Definition 2.4. Für einen Binärbaum T der Weite w und eine natürliche Zahl $n \leq w$ definieren wir die *Gabelung* $T \wedge n$ als den Binärbaum der entsteht, indem man an das n -te Blatt von T zwei weitere Blätter anheftet.

Beispiel 2.5.



Wir benötigen folgende, leicht zu überprüfende Rechenregel:

Lemma 2.6. Für einen Binärbaum T der Weite w und $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n < k \leq w$ gilt

$$T \wedge n \wedge k = T \wedge k \wedge n + 1$$

Da die Verknüpfung auf F einfach die Hintereinanderausführung der Funktionen ist, gilt außerdem die folgende Aussage.

Satz 2.7. Sind $f, g \in F$ sodass f ein Baumdiagramm $\begin{bmatrix} T \\ U \end{bmatrix}$ und g ein Baumdiagramm $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ hat, dann ist

$$fg = \begin{bmatrix} T \\ U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ V \end{bmatrix}$$

Korollar 2.8. Hat f ein Baumdiagramm $\begin{bmatrix} T \\ V \end{bmatrix}$, dann hat f^{-1} ein Baumdiagramm $\begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix}$.

Satz 2.9. Für ein Baumdiagramm $\begin{bmatrix} T \\ V \end{bmatrix}$ der Weite w und ein $n \leq w$ gilt

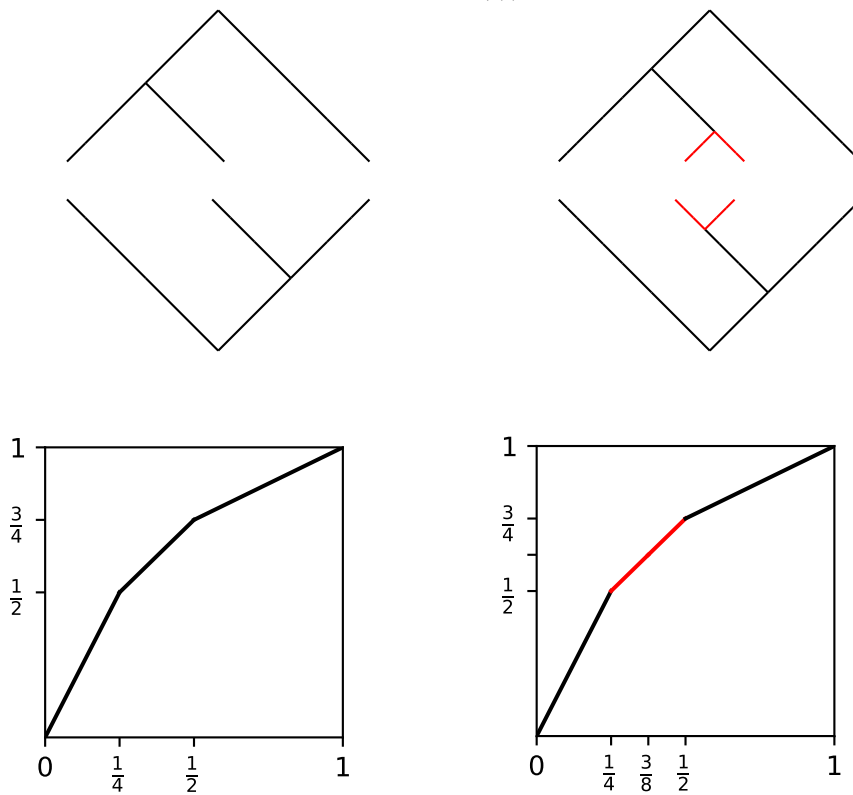
$$\begin{bmatrix} T \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \wedge n \\ V \wedge n \end{bmatrix}$$

Beweis. Es sei $f := \begin{bmatrix} T \\ V \end{bmatrix}$ und $g := \begin{bmatrix} T \wedge n \\ V \wedge n \end{bmatrix}$.

Es habe das n 'te Blatt von T Tiefe k und das n 'te Blatt von V Tiefe m , dann hat f auf dem Intervall, dass dem n 'ten Blatt von T entspricht Steigung 2^{k-m} .

Aber sowohl das n 'te und $(n + 1)$ 'te Blatt von $T \wedge n$ hat Tiefe $k + 1$, bei $V \wedge n$ entsprechend $m + 1$, damit hat g auf diesen Intervallen die Steigung $2^{(k+1)-(m+1)} = 2^{k-m}$. Da f und g auf den anderen Intervallen offenbar ohnehin übereinstimmen, gilt $f = g$. \square

Beispiel 2.10. Links ist ein Baumdiagramm $\begin{bmatrix} T \\ V \end{bmatrix}$, darunter sein Funktionsgraph, und rechts ist das Baumdiagramm zu $\begin{bmatrix} T \wedge 1 \\ V \wedge 1 \end{bmatrix}$, ebenfalls mit Funktionsgraph.



Bemerkung 2.11. Insbesondere kann man also Paare gegenüberliegender Gabelungen kürzen. Solche Paare werden auch *Carets* genannt.

Man dieses Verfahren auch nutzen um die Baumdiagramme zweier beliebiger Elemente von F so zu erweitern, dass der Zielbaum des einen mit dem Quellbaum des anderen übereinstimmt um anschließend Satz 2.7 anzuwenden. Im Prinzip können wir also nun beliebige Elemente allein mit ihrer kombinatorischen Darstellung per Baumdiagramme multiplizieren.

Definition 2.12. Ein Baumdiagramm heißt reduziert, wenn es nicht wie in Satz 2.9 vereinfacht werden kann.

Satz 2.13. *Jedes Element von F hat ein eindeutiges reduziertes Baumdiagramm.*

Beweis. Skizze:

Es reicht zu erkennen, dass der Schnitt zweier möglichen Quellbäume für ein festes Element von F wieder ein möglicher Quellbaum dieses Elements ist. Es gibt also einen solchen minimalen Quellbaum, der dann schon eindeutig ein reduziertes Baumdiagramm bestimmt. \square

3 Erzeuger und Präsentationen

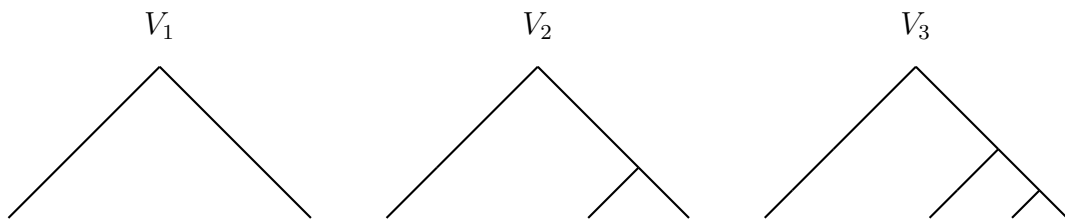
Nun wollen wir gewissen Erzeugendensysteme für F untersuchen. Um die Erzeuger zu definieren benötigen wir zunächst eine bestimmte Art von Binärbäumen.

Definition 3.1. Rechtsranken sind Binärbaum die entstehen, indem man immer das Blatt am weitesten rechts aufspaltet. Konkret ist die *Rechtsranke der Weite w* mit V_w (engl. *right vine*) bezeichnet und ist gegeben durch

$$V_w = \begin{cases} \bullet & \text{falls } w = 0 \\ V_{w-1} \wedge w - 1 & \text{falls } w > 0 \end{cases}$$

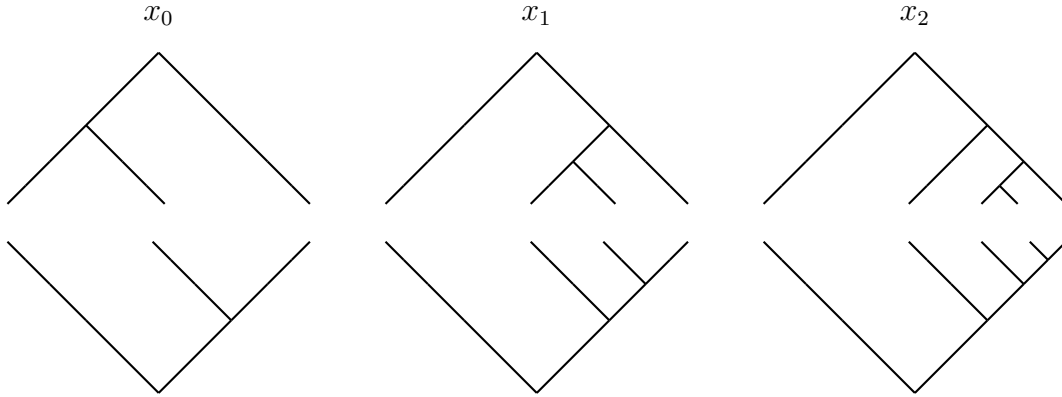
wobei \bullet der Baum mit nur einem Knoten ist.

Beispiel 3.2.



Definition 3.3. Wir nennen Elemente von f für die ein Baumdiagramm mit Rechtsranke als Zielbaum existiert *positiv*. Für einen Binärbaum T der Weite w bezeichnet $[T]$ das positive Element $\begin{bmatrix} T \\ V_w \end{bmatrix}$.

Definition 3.4. Wir bezeichnen mit x_0, x_1, x_2, \dots Elemente von F , die durch folgende Baumdiagramme dargestellt werden:



Konkret definieren wir sie als die positiven Elemente

$$x_n = [V_{n+1} \wedge n]$$

Gelegentlich ist eine leicht andere Darstellung nützlich:

Lemma 3.5. Für $n, w \in \mathbb{N}$ mit $n < w$ gilt

$$x_n = [V_w \wedge n]$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
x_n &= [V_{n+1} \wedge n] = \left[\begin{array}{c} V_{n+1} \wedge n \\ V_{n+2} \end{array} \right] && \text{per Definition} \\
&= \left[\begin{array}{c} (V_{n+1} \wedge n) \wedge n + 2 \wedge \cdots \wedge w \\ V_{n+2} \wedge n + 2 \wedge \cdots \wedge w \end{array} \right] && \text{Satz 2.9} \\
&= \left[\begin{array}{c} (V_{n+1} \wedge n + 1 \wedge \cdots \wedge w - 1) \wedge n \\ V_{n+2} \wedge n + 2 \wedge \cdots \wedge w \end{array} \right] && \text{Lemma 2.6} \\
&= \left[\begin{array}{c} V_w \wedge n \\ V_w + 1 \end{array} \right] = [V_w \wedge n] && \text{per Definition}
\end{aligned}$$

□

Mithilfe der x_n können wir die Gabeloperation \wedge durch die Verknüpfung von F , d.h. der Komposition, ersetzen

Satz 3.6. Sei T ein Binärbaum der Weite w . Für $n < w$ gilt dann

$$[T]x_n = [T \wedge n]$$

Beweis.

$$[T]x_n = \left[\begin{array}{c} T \wedge n \\ V_w \wedge n \end{array} \right] [V_w \wedge n] = [T \wedge n]$$

□

Satz 3.7. Die Elemente $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ erzeugen F .

Beweis. Offenbar lässt sich jeder Binärbaum aus \bullet durch Gabelungen konstruieren. Satz 3.6 zeigt daher, dass $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ die positive Elemente aus F erzeugen.

Um zu sehen, dass die positiven Elemente ganz F erzeugen, betrachte ein Element $\begin{bmatrix} T \\ V \end{bmatrix} \in F$. Nach Satz 2.7 und Korollar 2.8 ist dann $\begin{bmatrix} T \\ V \end{bmatrix} = [T][V]^{-1}$, wobei $[T]$ und $[V]$ natürlich nach Definition positiv sind. \square

Satz 3.8. Für $k < n$ gelten folgende Rechenregeln:

$$(i) \quad x_n^{-1}x_k = x_kx_{n+1}^{-1}$$

$$(ii) \quad x_k^{-1}x_n = x_{n+1}x_k^{-1}$$

$$(iii) \quad x_nx_k = x_kx_{n+1}$$

$$(iv) \quad x_k^{-1}x_n^{-1} = x_{n+1}^{-1}x_k^{-1}$$

Beweis. Die Regeln lassen sich leicht mit Lemma 2.6 und Satz 3.6 überprüfen. \square

Satz 3.9. Die Elemente x_0 und x_1 erzeugen F .

Beweis. Mit Satz 3.8 können wir folgende Aussage über die Konjugation machen

$$(x_n)^{x_0} = x_0^{-1}x_nx_0 = x_{n+1}x_0^{-1}x_0 = x_{n+1}$$

Damit haben wir

$$x_n = (x_1)^{x_0^{n-1}}$$

und das zeigt, dass $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ durch x_0 und x_1 erzeugt werden. \square

Die Rechenregeln aus Satz 3.8 sowie die Aussagen über die Erzeuger in Satz 3.7 und Satz 3.9 lassen nun die folgenden drei Aussagen über Präsentationen und Normalformen plausibel erscheinen. Vollständige Beweise wollen wir hier allerdings nicht angeben.

Theorem 3.10. F hat eine Präsentation

$$\langle x_0, x_1, x_2, \dots \mid x_nx_k = x_kx_{n+1} \text{ für } k < n \rangle$$

Theorem 3.11. F hat eine endliche Präsentation

$$\langle x_0, x_1 \mid x_2x_1 = x_1x_3, x_3x_1 = x_1x_4 \rangle$$

wobei hier für $n \geq 2$ die Symbole x_n für die Wörter $(x_1)^{x_0^{n-1}}$ stehen.

Theorem 3.12. Jedes Element von F kann eindeutig dargestellt werden als ein Ausdruck der Form

$$x_0^{a_0} \cdots x_n^{a_n} x_n^{-b_n} \cdots x_0^{-b_0}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{N}$ sodass genau eines von a_n und b_n ungleich null ist und zudem für alle i gilt:

$$a_i \neq 0 \text{ und } b_i \neq 0 \implies a_{i+1} \neq 0 \text{ oder } b_{i+1} \neq 0$$

Bemerkung 3.13. Die positiven Elemente von F sind genau diejenigen, die in dieser Normalform nur positive Exponenten haben.

Beispiel 3.14. Wir versuchen nun das Wort $x_0 x_4 x_2 x_3^{-1} x_2 x_0^{-1}$ in Normalform zu bringen, indem wir die Regeln aus Satz 3.8 anwenden.

$$\begin{aligned} & x_0 x_4 x_2 (x_3^{-1} x_2) x_0^{-1} \\ &= x_0 (x_4 x_2) x_2 x_4^{-1} x_0^{-1} && \text{(i)} \\ &= x_0 x_2 (x_5 x_2) x_4^{-1} x_0^{-1} && \text{(iii)} \\ &= x_0 x_2^2 x_6 (x_4^{-1} x_0^{-1}) && \text{(iii)} \\ &= x_0 x_2^2 x_6 x_0^{-1} x_3^{-1} && \text{(iv)} \\ &= x_1^2 x_5 x_0 x_0^{-1} x_3^{-1} && \text{mehrfach (iii)} \\ &= x_1^2 x_5 x_3^{-1} \end{aligned}$$

4 Die Kommutatorgruppe

Aus der unendlichen Präsentation lässt sich leicht ablesen, dass die Abelisierung von F gegeben ist durch

$$\langle x_{,0}, x_1, x_1, \dots \mid x_n + x_k = x_k + x_{n+1} \text{ für } k < n \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Wir können die die Kommutatoren von F allerdings auch konkreter beschreiben und dadurch Einsichten über die Kommutatorgruppe $[F, F]$ und Quotienten von F erlangen.

Satz 4.1. Wir definieren eine Funktion $\varphi: F \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ durch $\varphi(f) = (\log_2 f'(0), \log_2 f'(1))$, wobei entsprechend die rechts- bzw. linksseitige Ableitung gemeint ist. Dann ist φ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker \varphi = [F, F]$.

Beweis. Dass φ ein Homomorphismus ist folgt sofort aus der Kettenregel. Weiterhin gilt nun

$$\varphi(x_0) = (1, -1) \text{ und } \varphi(x_1) = (0, -1) .$$

$\{(1, -1), (0, -1)\}$ erzeugen $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, also ist φ zumindest ein Epimorphismus. Diese beiden Vektoren sind aber auch linear unabhängig. Weil zudem $\{x_0, x_1\}$ ganz F erzeugen, folgt $\ker \varphi = [F, F]$. \square

Definition 4.2. Ein *dyadisches Intervall* ist ein Intervall der Form

$$\left[\frac{k_1}{2^{n_1}}, \frac{k_2}{2^{n_2}} \right] \text{ für } k_1, k_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

Ein dyadisches Intervall ist offenbar eine Vereinigung endlich vieler Standard dyadisches Intervalle (siehe Definition 1.1).

Definition 4.3. Für eine Funktion $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ nennen wir

$$\text{supp}(f) := \{t \in [0, 1] \mid f(t) \neq t\}$$

den *Träger* von f . Falls f bijektiv ist gilt offenbar $\text{supp}(f) = \text{supp}(f^{-1})$.

Damit definieren wir für ein dyadisches Intervall I eine Untergruppe von F als

$$\text{PL}_2(I) = \{f \in F \mid \text{supp}(f) \subset I\}$$

Bemerkung 4.4. Für ein dyadisches Intervall I gilt wegen Satz 4.1, dass $\text{PL}_2(I) \subset [F, F]$ genau dann, wenn $I \subset (0, 1)$ ist.

Theorem 4.5. *Jede nicht nichttriviale Untergruppe von F , die durch $[F, F]$ normalisiert wird, enthält $[F, F]$.*

Beweis. Sei $N \subset F$ eine nichttriviale Untergruppe von F , die von $[F, F]$ normalisiert wird und sei $[f, g]$ ein beliebiger Kommutator in F .

Wähle ein nichttriviales $\eta \in N$. Da η stetig und nicht die Identität ist, aber $\eta(0) = 0$ und $\eta(1) = 1$ gilt, gibt es ein dyadisches Intervall $I \subset (0, 1)$, sodass $\eta(I)$ und I disjunkt sind.

Wegen $\text{supp}([f, g]) \subset (0, 1)$ lässt sich nun ein $\gamma \in [F, F]$ konstruieren mit

$$\text{supp}([f, g]) \subset \gamma(I) .$$

Da N durch $[F, F]$ normalisiert wird, reicht es zu zeigen, dass $[f, g]^{\gamma^{-1}} \in N$. Wir bezeichnen $\tilde{f} = f^{\gamma^{-1}}$ und $\tilde{g} = g^{\gamma^{-1}}$, dann ist

$$[f, g]^{\gamma^{-1}} = [\tilde{f}, \tilde{g}] \text{ und } \tilde{f}, \tilde{g} \in \text{PL}_2(I) .$$

Damit ist nun $[\eta, \tilde{f}] = \eta^{-1} \tilde{f}^{-1} \eta \tilde{f} = \eta^{-1} \eta \tilde{f} \in N$. Leicht lässt sich überprüfen, dass gilt

$$\text{supp}([\eta, \tilde{f}]) \subset I \cup \eta(I) \text{ und } [\eta, \tilde{f}]|_I = \tilde{f}|_I$$

und damit folgt schließlich

$$[\tilde{f}, \tilde{g}] = [[\eta, \tilde{f}], \tilde{g}] \in N$$

□

Korollar 4.6. *Jede echte Quotient von F ist abelsch.*

Beweis. Theorem 4.5 impliziert, dass jeder Normalteiler von F ganz $[F, F]$ enthält. □

Korollar 4.7. *$[F, F]$ ist einfach.*

5 Die Thompson Gruppe T und V

Wir wollen nun noch kurz die verwandten Thompson-Gruppen T und V vorstellen. Weitere Informationen zu diesen Gruppen sowie Beweise finden sich in Cannon u. a. [2].

Um diese Gruppe im Zusammenhang mit F zu definieren, werden wir auch die Elemente von F leicht anders definieren. Statt Selbstabbildungen des Einheitsintervalls $[0, 1]$ untersuchen wir nun solche des Einheitskreises S^1 . Wir betrachten dabei S^1 als das Interall $[0, 1]$ bei dem die beiden Endpunkte zusammengeschlagen wurden und nennen die kanonische Projektion $p: [0, 1] \twoheadrightarrow S^1$.

Nun existiert für jede Abbildung $f: S^1 \rightarrow S^1$ eine Abbildung $\hat{f}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $fp = p\hat{f}$. Bei Punkten $z \in S^1$ mit $f(z) = p(0)$ setzen wir wie hierbei der Eindeutigkeit wegen für $x \in p^{-1}(z)$

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten jetzt solche Abbildungen f, \hat{f} für die ähnlich wie in Satz 1.4 gilt:

1. \hat{f} ist stückweise linear,
2. Alle Steigungen von \hat{f} sind Zweierpotenzen, und
3. Alle Bruchpunkte von \hat{f} haben dyadisch rationale Koordinaten

Dann ist $f \dots$

- ... in F genau dann, wenn $\hat{f}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ein Homöomorphismus ist,
- ... in T genau dann, wenn $f: S^1 \rightarrow S^1$ ein Homöomorphismus ist,
- ... in V genau dann, wenn f bijektiv und \hat{f} rechtsseitig stetig ist.

Offenbar sind das jeweils schwächere Anforderungen, weshalb $F \subset T \subset V$ gilt. Ähnlich wie F können die Elemente von T und V als Paare dyadischer Umordnungen und somit durch Baumdiagramme beschrieben werden. Allerdings ist die Zuordnung der Blätter von Quell- und Zielbaum nicht eindeutig. Bei Baumdiagrammen für T muss im Zielbaum das Bild eines (z.B. des ersten) Blattes im Quellbaum markiert werden, und bei V muss das Bild jedes Blattes gekennzeichnet werden.

Durch diese Varianten von Baumdiagrammen lässt sich wie bei F zeigen, dass T und V endlich erzeugt und sogar endlich präsentierbar sind. Nun haben wir gesehen, dass F nicht einfach ist, es hat den Normalteiler $[F, F] \subsetneq F$. Die Kommutatorgruppe $[F, F]$ ist zwar einfach, allerdings lässt sich zeigen, dass sie nicht endlich präsentiert ist. Die Gruppen T und V sind jedoch sowohl unendlich, endlich präsentiert und einfach. Tatsächlich war T die erste bekannte Gruppe mit diesen Eigenschaften.

Literatur

- [1] J. Belk, „Thompson’s Group F “, *arXiv:0708.3609 [math]*, 26. Aug. 2007. arXiv: [0708.3609](https://arxiv.org/abs/0708.3609). Adresse: [http://arxiv.org/abs/0708.3609](https://arxiv.org/abs/0708.3609).
- [2] J. W. Cannon, W. J. Floyd und W. R. Parry, „Introductory Notes on Richard Thompson’s Groups“, Adresse: <http://people.math.binghamton.edu/matt/thompson/cfp.pdf>.