Freie Produkte, amalgamierte Produkte und HNN-Erweiterungen

Anna Henningsen

16. Januar 2018

1 Freie und amalgamierte Produkte

Definition 1.1. Seien G, H Gruppen, wobei o. B. d. A. $G \cap H = \{1\}$ gelte (ansonsten können isomorphe Kopien der Gruppen gewählt werden).

Eine *Normalform* für das freie Produkt von G und H ist eine Sequenz der Form

$g_1 g_2 \cdots g_n$

mit $n \geq 0, g_i \in (G \cup H) \smallsetminus \{1\}$, die *strikt alternierend* ist, d. h. zwei aufeinanderfolgende Terme sind nicht beide aus A bzw. B.

Die Menge aller solchen Normalformen wird als *freies Produkt von G und H* bezeichnet und als $A * B$ geschrieben, und wird durch Verkettung und Umklammern bzw. Kürzen von Worten mit einer Gruppenstruktur versehen.

Das Einselement ist hierbei die leere Sequenz, d. h. $n = 0$.

Beispiel 1.2. Sind $g \in G, h \in H$, so ist $gh \cdot hg = gh^2g$, $gh \cdot gh = ghgh$ und $gh \cdot h^{-1}g = g^2$ in $G * H$.

Bemerkung. Sind $A, B \leq G$ und lässt sich jedes $g \in G$ als strikt alternierende Normalform über A und B schreiben, dann ist $G \cong A * B$.

Definition 1.3. Seien $A \leq G, B \leq H$ Gruppen, $\varphi : A \xrightarrow{\cong} B$ ein Isomorphismus, dann definieren wir

$$\begin{aligned} G *_{A=B} := G *_A H &:= \langle G * H \mid a = \varphi(a), a \in A \rangle \\ &= (G * H) / \langle\!\langle \varphi(a)a^{-1} \mid a \in A \rangle\!\rangle \end{aligned}$$

Wobei $\langle\!\langle \ldots \rangle\!\rangle$ die normale Hülle der Elemente bezeichnet, es wird also A mit $\varphi(A) = B$ identifiziert. Wir nennen die Gruppe $G *_{A=B} H$ das *(freie) amalgamierte Produkt* von G und H (bezüglich A, B und φ).

Wähle (Rechts-)Repräsentantensysteme T_A für die Nebenklassen von A in G und T_B von B in H, die jeweils das Einselement enthalten.

Wir definieren dann eine *A-Normalform* als eine Sequenz $(x_0, x_1, \ldots x_n)$ mit $x_0 \in A, x_i \in (T_A \cup T_B) \smallsetminus \{1\}$, wobei $x_1, \ldots, x_n$ strikt alternierend in T_A und T_B liegen.

Bemerkung. Im Spezialfall $A = B = 1$ fällt das amalgamierte Produkt mit dem freien Produkt der Gruppen G und H zusammen.

Satz 1.4. Für $f \in G *_{A=B} H$ existiert eine eindeutige A-Normalform $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ mit $f = x_0 x_1 \dots x_n$ (wobei die rechte Seite als Bild von $x_0 x_1 \dots x_n$ unter der Quotientenabbildung verstanden wird).

Beweis. Siehe [1], Kapitel 11. □

Beispiel 1.5. Seien $G = \langle a \mid a^{12} = 1 \rangle$, $H = \langle b \mid b^{15} = 1 \rangle$ zyklische Gruppen der Ordnung 12 bzw. 15.

G und H haben zwei zyklische Untergruppen der Ordnung 3, $A = \{1, a^4, a^8\}$ und $B = \{1, b^5, b^10\}$, die also insbesondere isomorph mit Isomorphismus $\varphi : A \to B, \varphi(a^4) = b^5$ sind.

Wir bilden das amalgamierte Produkt $G *_{A=B} H = \langle a, b \mid a^{12} = 1, b^{15} = 1, a^4 = b^5 \rangle$ und wählen Repräsentantensysteme $T_A = \{1, a, a^2, a^3\}$, $T_B = \{1, b, b^2, b^3, b^4\}$ sowie das Element $f = a^3 b a^5$, dessen Normalform wir bestimmen.

Dabei gehen wir von rechts nach links durch die Darstellung von f und schreiben jeden Faktor $g = a \cdot t$ mit $a \in A (= B)$, $t \in T_B$ bzw. $t \in T_A$ und wenden anschließend den Isomorphismus φ an:

$$\begin{aligned}
f &= a^3 b a^5 \\
&= a^3 b (a^4 \cdot a) \\
&\overset{\varphi(a^4)=b^5}{=} a^3 b b^5 \cdot a \\
&= a^3 b^6 a \\
&= a^3 (b^5 \cdot b) a \\
&\overset{\varphi^{-1}(b^5)=a^4}{=} a^3 a^4 \cdot b a \\
&= a^7 b a \\
&= a^4 \cdot a^3 b a
\end{aligned}$$

Da $a^4 \in A$ und $a^3 b a$ strikt alternierend aus $T_A \cup T_B$ ist, ist dies die A-Normalform von f.

Korollar 1.6. Der Homomorphismus $i : G * H \to G *_{A=B} H$ induziert Einbettungen $G, H \hookrightarrow G *_{A=B} H$ mit $i(A) = i(B)$ und $G *_{A=B} H$ wird von $i(G) \cup i(H)$ erzeugt.

Beweis. Jedes $g \in G$ hat in G eine eindeutige Zerlegung $g = a \cdot t$ mit $a \in A, t \in T_A$; dies ist dann auch die A-Normalform von g in $G *_{A=B} H$. Die Eindeutigkeit der Normalform liefert damit, dass dies eine Einbettung ist (insbesondere ist die Normalform eines $g \in G \setminus \{1\}$ schon g und damit nicht die Normalform 1 des Einselements).

$i(A) = i(B)$ folgt unmittelbar aus der Definition des amalgamierten Produkts.

$G *_{A=B} H$ wird von $i(G)$ und $i(H)$ erzeugt, weil G und H bereits nach Definition $G * H$ erzeugen. $\square$

Bemerkung. Das amalgamierte Produkt von $G *_{A=B} H$ erfüllt die folgende universelle Eigenschaft:

Sind $a\colon G \to C$ und $b\colon H \to C$ Homomorphismen mit $a|_A = b|_B$, dann existiert genau ein Homomorphismus $G *_{A=B} H \to C$, der a und b fortsetzt.

(D. h. das amalgamierte Produkt ist ein Pushout in der Kategorie der Gruppen.)

Satz 1.7. Es gibt eine endlich präsentierte Gruppe G, die isomorph zu einer echten Faktorgruppe ihrer selbst ist.

Beweis. Wir beginnen mit $A = \langle a, s \mid s^{-1}as = a^2 \rangle$, $B = \langle b, t \mid t^{-1}bt = b^2 \rangle$.

Offenbar sind die Erzeugnisse $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle$ isomorphe Untergruppen, es lässt sich also das amalgamierte Produkt bilden:

$$\begin{aligned} G &:= \langle A * B \mid a = b \rangle \\ &= A *_{\langle a \rangle = \langle b \rangle} B \\ &= \langle a, s, t \mid s^{-1}as = a^2, t^{-1}at = a^2 \rangle \end{aligned}$$

Seien die Homomorphismen α und β über

$$\begin{aligned} \alpha\colon &\ A \to G, \quad a \mapsto a^2, s \mapsto s \\ \beta\colon &\ B \to G, \quad b \mapsto b^2, t \mapsto t \end{aligned}$$

definiert (α ist die Konjugation mit s gefolgt von der Inklusion nach G und damit Homomorphismus; β entsprechend).

α und β kommutieren offenbar mit dem Isomorphismus zwischen den amalgamierten Untergruppen $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle$, lassen sich also zu einem Homomorphismus $\mu\colon G \to G$ fortsetzen.

Nach Definition liegen a^2, s, t im Bild $\mu(G)$, und damit auch $a = sa^2s^{-1} \in \mu(G)$, d. h. μ ist surjektiv, nach dem Homomorphiesatz gilt also $G/\ker\mu \cong G$.

Also genügt es, ein nichttriviales Element in $\ker\mu$ zu finden:

Für das Element $g = sas^{-1}tb^{-1}t^{-1}$ ist eine Normalform im amalgamierten Produkt durch $g = 1 \cdot (sas^{-1}) \cdot (tb^{-1}t^{-1})$ gegeben (denn sas^{-1} liegt nicht in $\langle a \rangle$ [1]), also aufgrund der Eindeutigkeit der Normalform $g \neq 1$.

[1] $\langle a \rangle$ ist zyklisch von unendlicher Ordnung. $s^{-1}(sas^{-1})s = a$, aber $s^{-1}(a^k)s = a^{2k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Es gilt aber $\mu(g) = sa^2s^{-1} \cdot tb^{-2}t^{-1} = a \cdot b^{-1} = 1$ in G, also $g \in \ker\mu \setminus \{1\}$.

$\square$

2 HNN-Erweiterungen

Definition 2.1. Sei G eine Gruppe, $A, B \leq G, \varphi\colon A \xrightarrow{\cong} B$.

Wir definieren die *HNN-Erweiterung* von G bezüglich A, B, φ als

$$\begin{aligned} G^* &:= (G * \langle t \rangle)/\langle\langle t^{-1}at \cdot \varphi(a)^{-1} \mid a \in A \rangle\rangle) \\ &= \langle G * \langle t \rangle \mid t^{-1}at = \varphi(a), a \in A \rangle \end{aligned}$$

wobei $\langle t \rangle$ eine unendliche zyklische Gruppe ist.

Insbesondere wird also der Isomorphismus φ in G als Konjugation mit t in G^* sichtbar.

Wir definieren wieder eine Normalform für Elemente $x \in G^*$:

x lässt sich mithilfe der Quotientenabbildung $i\colon G * \langle t \rangle \to G^*$ schreiben als $x = i(g_0)i(t)^{\epsilon_1}i(g_1)i(t)^{\epsilon_2} \ldots i(t)^{\epsilon_n}i(g_n)$ mit $n \geq 0$, $g_i \in G$ (nicht unbedingt verschieden von 1) und $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$.

Seien T_A, T_B wieder Vertretersysteme für rechte Nebenklassen von A, B in G mit $1 \in T_A, T_B$. Die Sequenz $(g_0, t^{\epsilon_1}, g_1, t^{\epsilon_2}, \ldots, t^{\epsilon_n}, g_n)$ bzw. das Wort $x = g_0t^{\epsilon_1}g_1t^{\epsilon_2} \ldots t^{\epsilon_n}g_n$ heißt *Normalform* für x, falls gilt:

- $g_0 \in G$
- Falls $\epsilon_i = -1$, dann $g_i \in T_A$
- Falls $\epsilon_i = +1$, dann $g_i \in T_B$
- Es kommt keine Teilsequenz der Form $t^\epsilon, 1, t^{-\epsilon}$ vor.

Bemerkung. Die Bedingungen an Normalformen verhindern, dass es offensichtliche Kürzungen gibt:

Falls etwa $\epsilon_i = -1$ und $g_i \in A \setminus \{1\}$, also die erste Bedingung verletzt ist, so lässt sich $t^{-1}g_i$ mithilfe der Relation $t^{-1}g_i = \varphi(g_i)t^{-1}$ umschreiben.

Beispiel 2.2. Sei $G = \langle a, b \rangle$ freie Gruppe über a und b, und $A = \langle a^2 \rangle$, $B = \langle b^3 \rangle$ als Untergruppen von G selbst frei.

Insbesondere sind A und B isomorph und wir können die HNN-Erweiterung $G^* = \langle a, b, t \mid t^{-1}a^2t = b^3 \rangle$ bilden.

Als Repräsentanten der Nebenklassen werden T_A als die Wörter in G, die nicht mit a^n (außer a^1), und T_B als die Wörter in G, die nicht mit b^n (außer b^1 oder b^2) beginnen.

Wir bestimmen die Normalform eines Elementes, indem wir von rechts nach links die Darstellung durchgehen und jeden Faktor als $g = a \cdot r$ mit $a \in A, r \in T_A$ bzw. $b \cdot r$ mit $b \in B, r \in T_B$ schreiben (je nach der vorausgehenden Potenz von t) und anschließend die Konjugation t anwenden:

$$\begin{aligned}
x &= b^2t^{-1}a^{-4}tb^5abt^{-1}a^4b^3a \\
&\overset{a^4 \in A}{=} b^2t^{-1}a^{-4}tb^5abt^{-1}(a^4 \cdot b^3a) \\
&\overset{t^{-1}a^4 = b^6t^{-1}}{=} b^2t^{-1}a^{-4}tb^5ab(b^6t^{-1})b^3a \\
&= b^2t^{-1}a^{-4}tb^5ab^7t^{-1}b^3a \\
&\overset{b^3 \in B}{=} b^2t^{-1}a^{-4}t(b^3 \cdot b^2ab^7)t^{-1}b^3a \\
&\overset{tb^3 = a^2t}{=} b^2t^{-1}a^{-4}(a^2t)b^2ab^7t^{-1}b^3a \\
&= b^2t^{-1}a^{-2}tb^2ab^7t^{-1}b^3a \\
&\overset{a^{-2} \in A}{=} b^2t^{-1}(a^{-2} \cdot 1)tb^2ab^7t^{-1}b^3a \\
&\overset{t^{-1}a^{-2} = b^{-3}t^{-1}}{=} b^2(b^{-3}t^{-1})1tb^2ab^7t^{-1}b^3a \\
&= bab^7t^{-1}b^3a
\end{aligned}$$

(bab^7, t^{-1}, b^3a) erfüllt die geforderten Bedingungen, ist also eine Normalform für x.

Satz 2.3. Sei G^* eine HNN-Erweiterung über G. Es gelten die folgenden Aussagen:

- Jedes $x \in G^*$ besitzt eine eindeutige Normalform $x = g_o t^{\epsilon_1} g_1 \dots t^{\epsilon_n} g_n$.
- Die Abbildung $G \hookrightarrow G^*$ mittels $g \mapsto g$ ist eine Einbettung (Higmann, Neumann, Neumann)
- Falls $w = g_0 t^{\epsilon_1} g_1 \dots t^{\epsilon_n} g_n$, $n \geq 1$ (nicht unbedingt in Normalform) keine Sequenz der Form $t^{-1} g_i t$ mit $g_i \in A$ oder $t g_j t^{-1}$ mit $g_j \in B$ enthäkt, dann ist $w \neq 1$ in G^* (Britton's Lemma).

Beweis. Siehe [1], Kapitel 14. □

Bemerkung. Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus der ersten, da für jedes $g \in G$ die eindeutige Normalform in G^* bereits (g) ist.

Satz 2.4. Jede abzählbare Gruppe lässt sich in eine 2-erzeugte Gruppe einbetten.

Beweis. Sei $G = \{g_0 = 1, g_1, g_2, \dots\}$ eine abzählbare Gruppe, g_i für $i \in \mathbb{N}$ (mit Wiederholungen, wenn G endlich).

Seien $U = \langle u, v\rangle$, $B = \langle a, b\rangle$ freie Gruppen von Rang 2.

$u, vuv^{-1}, v^2uv^{-2}, \dots$ erzeugen in U eine freie Untergruppe V von unendlichem Rang, und ebenso $a, bab^{-1}, b^2ab^{-2}, \dots$ eine freie Untergruppe K in B.

In $A := G * U$ erzeugen $g_0u, g_1vuv^{-1}, g_2v^2uv^{-2}, \dots$ ebenfalls eine freie Untergruppe H (die Projektion auf U liefert genau die freie Gruppe V).

Wir können also den Isomorphismus $g_0u \mapsto a, g_1vuv^{-1} \mapsto bab^{-1}, \dots$ zwischen H und K bilden und damit das amalgamierte Produkt:

$P := A *_{H=K} B$ wird erzeugt von u, v, a, b, denn aus $g_nv^nuv^{-n} = b^nab^{-n}$ wird ersichtlich, dass g_n sich als Wort in u, v, a, b schreiben lässt.

Wegen der Wahl $g_0 = 1$ ist in P sogar $u = a$, also lässt sich P bereits von v, a, b erzeugen.

$\langle v, a(= u)\rangle \leq G * U = A$ und $\langle a, b\rangle \leq B$ sind als Einbettungen von U bzw. B in P freie Gruppen von Rang 2 und insbesondere isomorph; wir bilden die zugehörige HNN-Erweiterung:

$E := \langle P, t \mid tvt^{-1} = a, tat^{-1} = b\rangle$

Diese wird von v und t erzeugt. Da E aus G durch amalgamierte Produkte und HNN-Erweiterungen hervorgegangen ist, existiert auch eine Einbettung von G nach E.

□

Lemma 2.5. Jedes $g \in A *_H B$ mit $ord(g) < \infty$ ist konjugiert zu einem $a \in A$ oder $b \in B$.

Beweis. Ist g nicht schon selbst in A bzw. B, schreibe $g = x_0x_1x_2 \dots x_n$, $n \geq 2$ in Normalform alternierend in A und B. Wenn $g^m = x_0x_1 \dots x_nx_0x_1 \dots x_nx_0x_1 \dots x_n$ für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ sich zum Einselement kürzt, so muss $x_n = (x_0x_1)^{-1}$ (falls x_1 und x_n aus verschiedenen Faktoren) oder $x_n = (x_0x_1x_2)^{-1}$ (falls x_1 und x_n beide aus A bzw. B) gelten; in jeden Fall ist g konjugiert zu einer kürzeren Darstellung des Einselements.

Wiederholtes Anwenden dieser Rechnung liefert, dass g zu einem x_i oder zu 1 konjugiert ist. □

Lemma 2.6. Analog gilt, dass jedes Element $g \in G^*$ von endlicher Ordnung in einer HNN-Erweiterung konjugiert zu einem $g' \in G$ ist.

Satz 2.7. Es gibt überabzählbar viele nichtisomorphe 2-erzeugte Gruppen.

Beweis. Sei p_i die i-te Primzahl, $C(i) = C_{p_i}$ die zyklische Gruppe von Ordnung p_i, $\sigma = (\sigma(i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine nicht-absteigende Folge natürlicher Zahlen.

Setze

$$A_\sigma := \bigoplus_{i=1}^{\infty} C(\sigma(i))$$

Dabei gilt $A_\sigma = A_\tau$ genau dann wenn $\sigma = \tau$: Andernfalls gibt es ein kleinstes $i \in \mathbb{N}$ mit $\sigma(i) \neq \tau(i)$, o. B. d. A. $\sigma(i) < \tau(i)$, und A_σ hat damit mehr Elemente der Ordnung $p_{\sigma(i)}$ als A_τ.

Nach 2.4 lässt sich jedes A_σ in eine zwei-erzeugte Gruppe G_σ einbetten, die aus A_σ aus HNN-Erweiterungen und amalgamierten Produkten hervorgeht.

Insbesondere ist nach 2.6 und 2.5 jedes Element endlicher Ordnung in G_σ zu einem in A_σ konjugiert, und damit gilt auch $G_\sigma = G_\tau$ nur genau dann wenn $\sigma = \tau$.

Die Menge aller nicht-absteigende Sequenzen σ in $\mathbb{N}$ ist überabzählbar; z. B. lässt sich $2^{\mathbb{N}}$ injektiv in diese Menge abbilden indem man $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}, b_i \in \{0,1\}$ auf die Partialsummen $(\sum_{i=1}^{k} b_i)_{k\in\mathbb{N}}$ abbildet. $\square$

Literatur

[1] O. Bogokpolski: Introduction to group theory. European Mathematical Society Publishing House, 2008.

[2] G. Baumslag: Topics in Combinatorial Group Theory. Birkhäuser, 1993.