Gruppen mit kleinen Kürzungen und die Rips-Konstruktion

Sei F eine freie Gruppe auf einer Menge X. Ein reduziertes Wort $w = y_1 \dots y_n$ ($y_i \in X \cup X^{-1}$) heißt zyklisch reduziert, wenn $y_n \neq y_1^{-1}$. Gibt es keine Kürzungen in einem Produkt $z = u_1 \dots u_n$ ($u_i \in F$), so schreiben wir $z \equiv u_1 \dots u_n$.
Eine Teilmenge $R \subset F$ heißt symmetrisiert, wenn alle Elemente aus R zyklisch reduziert und für alle $r \in R$ alle zyklisch reduzierten Konjugierten von r und r^{-1} auch zu R gehören.
Seien $r_1, r_2 \in R$ mit $r_1 \neq r_2$, $r_1 \equiv bc_1$ und $r_2 \equiv bc_2$, so nennt man b ein Stück.

Definition. Hat R eine der folgenden drei Eigenschaften, so hat R kleine Kürzungen bezüglich dieser Eigenschaft.

1. Eigenschaft $C'(\lambda)$ für ein $0 < \lambda < 1$:
   Wenn $r \in R$ und $r \equiv bc$ ist, wobei b ein Stück ist, dann ist $|b| < \lambda|\lambda|$ (Man nennt dies auch die metrische kleine Kürzungen Eigenschaft
2. Eigenschaft $C(p)$: Kein Element aus R kann als reduziertes Produkt von weniger als p Stücken geschrieben werden.
3. Eigenschaft $T(q)$: Sei $3 \leq h < q$. Angenommen r$r_1, \dots, r_h$ sind Elemente von R mit $r_i \neq r_{i+1}^{-1}$ und $r_n \neq R_1^{-1}$. Dann ist mindestens eines der Produkte $r_1 r_2, \dots, r_{h-1} r_h, r_h r_1$ reduziert ohne Kürzungen.

Bemerkung: Die Eigenschaft $C'(\lambda)$ impliziert $C(p)$ für $\lambda \leq \frac{1}{p-1}$.
Ist $G = \langle X \mid S \rangle$, wobei S nicht symmetrisiert ist, kann man zum symmetrischen Abschluss R von S übergehen und erhält eine neue Präsentation $G = \langle X \mid R \rangle$. Man sagt nun, dass G die kleine Kürzungen Eigenschaft besitzt, wenn R sie besitzt.

Beispiel. Die Fundamentalgruppe der kompakten, orientierbaren 2-Mannigfaltigkeit des Geschlechts 2 hat die Präsentation

$$G = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \rangle.$$

In diesem Fall besteht R aus allen zyklischen Permutationen von r und r^{-1}, wobei $r = a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_1 a_2^{-1} b_2^{-1} a_2 b_2$. Offenbar sind alle nichttrivialen Stücke einzelne Buchstaben und R hat die Eigenschaft $C'(\frac{1}{7})$ und $C(8)$.

Theorem (Rips-Konstruktion)**.** Sei $0 < \lambda < 1$ ung G eine endlich präsentierbare Gruppe. Dann existiert eine kurze exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow H \xrightarrow{\phi} G \longrightarrow 1,$$

sodass

(1) H eine endlich präsentierte Gruppe ist, die die Eigenschaft $C'(\lambda)$ besitzt.
(2) K eine endlich erzeugte Gruppe ist.

Beweis. Schreibe $G = \langle a_1, \dots, a_m \mid R_1, \dots, R_n \rangle$. Wir definieren nun H mit Erzeugern:

$$a_1, \dots, a_m, b_1, b_2$$

Relationen:

$$R_i b_1 b_2^{r_i} b_1 b_2^{r_i+1} \dots b_1 b_2^{s_i} (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$a_i^{-1} b_j a_i b_1 b_2^{p_{ij}} b_1 b_2^{p_{ij}+1} \dots b_1 b_2^{q_{ij}} (i = 1, \dots m; j = 1, 2)$$

$$a_i b_1 a_i^{-1} b_1 b_2^{u_{ij}} b_1 b_2^{u_{ij}+1} \dots b_1 b_2^{v_{ij}} (i = 1, \dots, m; j = 1, 2)$$

Wir können nun für jedes $\lambda > 0$ die $r_i, s_i, p_{ij}, q_{ij}, u_{ij} v_{ij}$ so wählen, dass

1. $r_i < s_i, p_{ij} < q_{ij}, u_{ij} < v_{ij}$
2. die Intervalle $[r_i, s_i], [p_{ij}, q_{ij}], [u_{ij}, v_{ij}]$ disjunkt sind
3. H eine Gruppe mit der Eigenschaft $C'(\lambda)$ ist.

Definiere $\phi \colon H \longrightarrow G$ mit $a_i \mapsto a_i$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $b_j \mapsto 1$ für $j = 1, 2$. Es ist klar, dass $\ker \phi = \overline{\langle b_1, b_2 \rangle}$ der normale Abschluss von $\langle b_1, b_2 \rangle$ ist. Da aber aufgrund der oben definierten Relationen $\langle b_1, b_2 \rangle$ normal in H ist, ist $K \cong \langle b_1, b_2 \rangle$ endlich erzeugt. □

Beispiel. Die Gruppe $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid [a, b] \rangle$ hat die Eigenschaft $C'(\frac{1}{3})$, $C(4)$ und $T(4)$. Wollen nun aus ihr eine Gruppe mit der Eigenschaft $C'(\frac{1}{4}$ konstruieren. Mache dies wie im Theorem beschrieben. Also besitzt H zum Beispiel die
Erzeuger:

$$a, b, c, d$$

und die Relationen:

$$a^{-1}b^{-1}abcdcd^2cd^3cd^4cd^5cd^6$$

$$a^{-1}cacd^7cd^8cd^9cd^{10}cd^{11}$$

$$a^{-1}dacd^{12}cd13cd^{14}cd^{15}cd^{16}$$

$$b^{-1}cbcd^{17}cd^{18}cd^{19}cd^{20}cd^{21}$$

$$b^{-1}dbcd^{22}cd^{23}cd^{24}cd^{25}cd^{26}$$

$$aca^{-1}cd^{27}cd^{28}cd^{29}cd^{30}cd^{31}$$

$$ada^{-1}cd^{32}cd^{33}cd^{34}cd^{35}cd^{36}$$

$$bcb^{-1}cd^{37}cd^{38}cd^{39}cd^{40}cd^{50}$$

$$bdb^{-1}cd^{42}cd^{43}cd^{44}cd^{45}cd^{46}$$

Man beachte, dass es unendlich viele Möglichkeiten gibt ein solches H zu konstruieren.

Korollar 1. Es gibt eine endlich präsentierte Gruppe H mit kleinen Kürzungen und endlich erzeugte Untergruppen $P_1, P_2 \leq H$, sodass $P_1 \cap P_2$ nicht endlich erzeugt ist.

Beweis. Sei G eine beliebige endlich präsentierte Gruppe mit diesen Eigenschaften. (So eine existiert.) Konstruiere H wie in dem vorangegangenem Theorem. Seien Q_1, Q_2 endlich erzeugte Untergruppen von G dessen Schnitt nicht endlich erzeugt ist. Sei nun $P_1 = \phi^{-1}(Q_1)$ und $P_2 = \phi^{-1}(Q_2)$. P_1 und P_2 sind nach Konstruktion endlich erzeugt. Jedoch ist $P_1 \cap P_2$ nicht endlich erzeugt, denn sonst wäre auch

$$\phi(P_1 \cap P_2) = \phi(\phi^{-1}(Q_1) \cap \phi^{-1}(Q_2)) = \phi(\phi^{-1}(Q_1 \cap Q_2)) = Q_1 \cap Q_2$$

nicht endlich erzeugt. □

Bemerkung: Ein Beispiel für eine derartige Gruppe ist die Gruppe $G = \langle a, b \mid a^{-1}b^2a = b^2\rangle$ mit den Untergruppen $H = \langle a, b^{-1}ab\rangle \cong F_2$ und $L = \langle ba, ab\rangle \cong F_2$. $H \cap L$ ist nicht endlich erzeugt. [Proposition 23.6 in Introductioin to Group Theory, Bogopolski]

Korollar 2. Es gibt eine endlich präsentierte Gruppe H mit kleinen Kürzungen und einer endlich erzeugten Untergruppe $P \leq H$, sodass P nicht endlich präsentierbar ist.

Beweis. Wir nehmen eine beliebige endlich präsentierbare Gruppe G mit diesen Eigenschaften. Konstruiere H wie in obigem Theorem. Es existiert also eine Untergruppe $Q \leq G$, die endlich erzeugt, aber nicht endlich präsentiert ist. Sei nun $P = \phi{-}1(Q)$. P ist endlich erzeugt aber nicht endlich präsentiert, da $P/\langle b_1, b_2\rangle \cong Q$ ist. $\square$