

Hyperbolische Gruppen

Seminarvortrag WS17/18

Dozent: Prof. Dr. O. Bogopolski

Mathematisches Institut
der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Endliche Untergruppen hyperbolischer Gruppen	2
2 Das Wortproblem	6

Einleitung

Das Studium hyperbolischer Gruppen ist ein sehr weitläufiges Gebiet; dieser Seminarvortrag soll einen kleinen Einblick in die Untersuchung hyperbolischer Gruppen bieten.

Zu Beginn soll dabei das Konzept hyperbolischer Gruppen deutlich gemacht werden und ein Satz zu Konjugationsklassen endlicher Untergruppen bewiesen werden. Im zweiten Abschnitt soll dann das erste der drei Dehnschen Probleme, das Wortproblem, für hyperbolische Gruppen gelöst werden.

Elementar zum Verständnis und der Bearbeitung ist dabei das Konzept von Cayleygraphen, von dessen Kenntnis hier ausgegangen wird.

Kapitel 1

Endliche Untergruppen hyperbolischer Gruppen

Im Folgenden sei die Metrik auf dem Cayleygraphen einer Gruppe wie folgt definiert: Der Abstand zweier Punkte auf dem Graphen sei 1, wenn diese Punkte direkt durch eine Kante verbunden sind. Somit ist der Abstand zweier beliebiger Punkte durch die minimale Anzahl an Kanten definiert, die für die Verbindung der beiden Punkte benötigt wird. Offenbar gibt es eine solche kürzeste Verbindung (Geodäte) immer, und der Cayleygraph einer beliebigen Gruppe ist ein geodätischer, metrischer Raum. Für einen solchen Raum kann man nun definieren, was es heißt hyperbolisch zu sein.

Definition 1.1

Sei $\delta > 0$. Ein geodätischer Dreieck in einem metrischen Raum heißt δ -dünn, falls jede Seite des Dreiecks in der δ -Umgebung der beiden anderen Seiten enthalten ist.

Ein geodätischer, metrischer Raum X heißt δ -hyperbolisch, falls jedes geodätische Dreieck in X δ -hyperbolisch ist.

Definition 1.2

Eine Gruppe G , mit endlichem Erzeugendensystem A , heißt hyperbolisch, falls der Cayleygraph $\Gamma(X, A)$ mit der oben beschriebenen Metrik δ -hyperbolisch ist, für ein $\delta > 0$.

Bemerkung 1.3

Die Eigenschaft einer Gruppe hyperbolisch zu sein, ist unabhängig von dem (endlichen) Erzeugendensystem A . Das liegt daran, dass der Wechsel zwischen verschiedenen Erzeugendensystemen eine Quasi-Isometrie zwischen den Cayleygraphen darstellt. Ist X_1 δ_1 -hyperbolisch und $f : X_1 \rightarrow X_2$ eine Quasi-Isometrie, dann ist X_2 schon δ_2 -hyperbolisch, für ein $\delta_2 > 0$. Der Beweis dazu soll jedoch an dieser Stelle ausgelassen werden.

Beispiel 1.4

Die unendliche Diedergruppe D_∞ hat zwei Darstellungen.

$$D_\infty = \langle r, s \mid s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$$

$$D_\infty = \langle s_0, s_1 \mid s_0^2 = s_1^2 = 1 \rangle$$

Die Cayleygraphen $\Gamma(D_\infty, \{r, s\})$ und $\Gamma(D_\infty, \{s_0, s_1\})$ sind verschieden und δ -hyperbolisch für verschiedene δ :

$\Gamma(D_\infty, \{r, s\})$ ist 1-hyperbolisch, jedoch nicht δ -hyperbolisch falls $\delta < 1$ gilt, aber $\Gamma(D_\infty, \{s_0, s_1\})$ ist δ -hyperbolisch, für alle $\delta > 0$.

Der folgende Satz kann sowohl direkt bewiesen werden, aber auch als Korollar von Satz 2.3 im zweiten Abschnitt gesehen werden. Ein direkter Beweis findet sich in in der Literatur (Kapitel III.Γ, Proposition 2.2, Bridson-Haefliger [1]).

Satz 1.5

Jede hyperbolische Gruppe ist endlich präsentierbar.

Für die Untersuchung der Konjugationsklassen endlicher Untergruppen hyperbolischer Gruppen sollen Hilfsaussagen zu allgemeinen metrischen Räumen verwendet werden.

Definition 1.6

Sei X ein metrischer Raum, $Y \subset X$ ein beschränkter Unterraum und $\varepsilon > 0$. Definiere $r_Y := \{\rho > 0 \mid Y \subseteq B(x, \rho), x \in X\}$. Dann heißt $C_\varepsilon(Y) := \{x \in X \mid Y \subseteq B(x, r_Y + \varepsilon)\}$ das Quasi-Zentrum von Y bezüglich ε .

Lemma 1.7

Sei X ein δ -hyperbolischer Raum und $Y \subset X$ beschränkt. Dann hat $C_\varepsilon(Y)$ einen Durchmesser kleiner als oder gleich $(4\delta + 3\varepsilon)$, d.h. es gilt $d(x, x') \leq 4\delta + 2\varepsilon$ für beliebige $x, x' \in X$.

Beweis. Seien $x, x' \in C_\varepsilon(Y)$, $y \in Y$ beliebig und m Mittelpunkt der Geodäte $[x, x']$. Man erhält ein geodätisches Dreieck mit den Eckpunkten x, x', y . Da X δ -hyperbolisch ist, gibt es einen Punkt $p \in [x, y] \cup [x', y]$, mit $d(m, p) \leq \delta$ und ohne Einschränkung kann $p \in [x, y]$ angenommen werden. Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$d(p, x) \leq d(x, m) - d(p, m) \leq d(x, m) - \delta$$

und somit

$$d(y, p) = d(y, x) - d(p, x) \leq d(y, x) - d(x, m) + \delta = d(y, x) + \delta - d(x, x')/2$$

Wegen $x \in C_\varepsilon(Y)$ gilt $d(x, y) < r_Y + \varepsilon$ und es gilt

$$d(y, m) \leq d(y, p) + d(p, m) < r_Y + \varepsilon + 2\delta - d(x, x')/2.$$

Nun möchte man y so wählen, dass $d(y, m) \geq r_Y$ erfüllt wird. Das ist ohne Weiteres möglich, falls $m \notin \{x \in X \mid \forall \rho > r_Y : Y \subseteq B(x, \rho)\}$. Das gilt für $m \in \{x \in X \mid \forall \rho > r_Y : Y \subseteq B(x, \rho)\}$ nicht unbedingt, z.B. falls $Y = B(m, r_Y)$ ist. Es gibt jedoch für jedes $\hat{\varepsilon} > 0$ ein $y_{\hat{\varepsilon}} \in Y$, sodass $d(y_{\hat{\varepsilon}}, m) \geq r_Y - \hat{\varepsilon}$ gilt. Mit obiger Gleichung folgt dann

$$r_Y - \hat{\varepsilon} \leq d(y_{\hat{\varepsilon}}, m) < r_Y + \varepsilon + 2\delta - d(x, x')/2, \text{ für alle } \hat{\varepsilon} > 0,$$

und somit

$$\varepsilon + 2\delta - d(x, x')/2 \geq 0 \iff d(x, x') \leq 2\varepsilon + 4\delta$$

■

Die Anwendung des Lemmas auf den Cayleygraphen hyperbolischer Gruppen liefert folgendes Ergebnis:

Satz 1.8

Sei G eine hyperbolische Gruppe. Dann besitzt G nur endlich viele Konjugationsklassen endlicher Untergruppen.

Beweis. Sei $G = \langle A \rangle$, mit $|A| < \infty$, und $\Gamma(G, A)$ δ -hyperbolisch. Sei außerdem $H \leq G$ eine endliche Untergruppe und $C_1(H) \subset \Gamma(G, A)$ ein Quasi-Zentrum nach Definition 1.6.

H wirkt durch Linksmultiplikation auf $\Gamma(G, A)$ und lässt dabei $C_1(H)$ invariant, denn:

$$\begin{aligned} H.C_1(H) &= \{hx \in \Gamma(X, A) \mid H \subseteq B(x, r_H + 1), h \in H\} \\ &= \{x \in \Gamma(X, A) \mid H \subseteq B(h^{-1}x, r_Y), h \in H\} \\ &= \{x \in \Gamma(X, A) \mid H.H \subseteq B(x, r_Y)\} = C_1(H) \end{aligned}$$

Sei nun $x \in C_1(H)$, dann gilt nach obiger Feststellung $x^{-1}Hx.x^{-1}C_1(H) = x^{-1}H.C_1(H) = x^{-1}C_1(H)$. Wegen $x \in C_1(H)$ ist $1 \in x^{-1}C_1(H)$, also $x^{-1}Hx \subseteq x^{-1}Hx.x^{-1}C_1(H) = x^{-1}C_1(H)$, also ist jede endliche Untergruppe konjugiert zu einer Teilmenge von $x^{-1}C_1(H)$. Davon gibt es aber nur endlich viele, da nach Lemma 1.7 der Durchmesser von $x^{-1}C_1(H)$ kleiner oder gleich $4\delta + 2$ ist, und die Menge der Punkte im Cayleygraphen diskret ist. ■

Kapitel 2

Das Wortproblem

Zu den bekanntesten Problemen der kombinatorischen Gruppentheorie gehören die sogenannten Dehnschen Probleme, die von Max Dehn im Jahre 1912 formuliert wurden. Dabei handelt es sich um die Frage, ob es zu folgenden drei Fragestellungen ein Verfahren gibt, welches in endlicher Zeit die korrekte Antwort liefert:

Das Wortproblem: Ist ein Element aus der Gruppe, gegeben als Folge von Erzeugern und Inversen von Erzeugern, die Identität?

Das Konjugationsproblem: Sind zwei gegebene Elemente einer Gruppe konjugiert zueinander?

Das Isomorphieproblem: Erzeugen zwei gegebene Präsentationen $\langle A_1 | R_1 \rangle$ und $\langle A_2 | R_2 \rangle$ zueinander isomorphe Gruppen?

Keines der drei Probleme ist für jede endlich präsentierte Gruppe entscheidbar, jedoch sind alle Probleme für hyperbolische Gruppen lösbar. Bis auf einen Beweisschritt soll die Existenz einer Lösung der Wortproblems für hyperbolische Gruppen hier gelöst werden.

Definition 2.1

Sei $G = \langle A | R \rangle$ eine endlich präsentierte Gruppe. Seien $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$ Wörter aus der freien Gruppe über A , mit den folgenden Bedingungen:

1. $u_i =_G v_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$2. |u_i| < |v_i|, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

3. *Entspricht eine Folge von Erzeugern aus $A \cup A^{-1}$ der Identität in G , dann ist schon mindestens eines der u_i als Teilfolge enthalten.*

Dann lässt sich das Wortproblem für ein Wort w mit folgendem Algorithmus lösen:

1. *Suche nach einem Teilwort u_i in w . Ist keines enthalten, so entspricht w nicht der Identität.*

2. *Ist ein u_i enthalten, ersetze es durch v_i . Man erhält ein neues, echt kürzeres Wort w' .*

3. *Ist w' nicht das leere Wort (also 1_G), dann beginne bei Schritt 1.*

Der gegebene Algorithmus heißt Dehn-Algorithmus.

Definition 2.2

Eine endliche Präsentation $G = \langle A | R \rangle$ heißt Dehn-Präsentation, falls $R = \{u_1 v_1^{-1}, \dots, u_n v_n^{-1}\}$, wobei $\{u_i, v_i | i \in \{1, \dots, n\}\}$ die Bedingungen aus Definition 2.1 erfüllt.

Im Hinblick der obigen Definitionen stellt sich nun die Frage, welche Gruppen eine Dehn-Präsentation besitzen. Es stellt sich heraus:

Satz 2.3

Eine endlich präsentierbare Gruppe G besitzt eine Dehn-Präsentation, gdw. sie hyperbolisch ist.

Aussage zu der tatsächlichen Erreichbarkeit einer Dehn-Pr. einfügen

Bevor diese Aussage bewiesen werden kann, muss zunächst etwas Vorarbeit geleistet werden.

Definition 2.4

Sei X ein metrischer Raum und $k > 0$. Ein Weg $c : [a, b] \rightarrow X$ heißt k -lokal geodätisch, falls $d(c(t), c(t')) = l(c|_{[t, t']})$, für alle $t, t' \in [a, b]$, mit $t < t'$ und

$l(c|_{[t,t']}) \leq k$ (dabei bezeichnet $l(c|_{[t,t']})$ die Länge des Weges c , von $c(t)$ bis $c(t')$).
In anderen Worten: Jeder ausreichend kurze Teilweg von c ist schon eine Geodäte.

Satz 2.5

Sei X ein δ -hyperbolischer, geodätischer Raum und $c : [a, b] \rightarrow X$ eine k -lokale Geodäte, mit $k > \delta$. Dann ist $im(c)$ in der 2δ -Umgebung jeder beliebigen Geodäte $[c(a), c(b)]$ enthalten.

Beweis. Sei $[c(a), c(b)]$ eine beliebig gewählte Geodäte und $x = c(t) \in im(c)$, mit maximalem Abstand zu $[c(a), c(b)]$. Dann gibt es zwei Fälle.

Fall 1: $l(c|_{[a,t]}), l(c|_{[t,b]}) > 4\delta$.

Dann gibt es einen Teilpfad $c' = c|_{[a',b']}$ von c , mit Mittelpunkt x und $l(c') \in (8\delta, k) \subset \mathbb{R}$. Es seien $y = c(a')$ und $z = c(b')$ Anfangs- bzw. Endpunkt von c' , und y' und z' die auf $[c(a), c(b)]$ liegenden Punkte, mit jeweils minimalem Abstand zu y bzw. x .

Da c k -lokal geodätisch ist und $l(c') < k$ gilt, ist c' eine Geodäte. Teile nun das so entstandene Viereck mit einer Geodäte $[y', z]$ in zwei geodätische Dreiecke $\Delta(y, y', z)$ und $\Delta(y', z, z')$. Nun ist X δ -hyperbolisch, also existiert ein Punkt $p \in [y, y'] \cup [y', z'] \cup [z, z']$, mit $d(x, p) \leq 2\delta$.

Wäre nun $p \in [y, y']$, dann würde folgen:

$$\begin{aligned} d(x, y') - d(y, y') &\leq (d(x, p) + d(p, y')) - (d(y, p) + d(p, y')) \\ &= d(x, p) - d(y, p) \leq d(x, p) - (d(y, x) - d(x, p)) \\ &= 2d(x, p) - d(x, y) < 4\delta - 4\delta = 0 \end{aligned}$$

Damit wäre y weiter von $[c(a), c(b)]$ entfernt als x , was ein Widerspruch zur Wahl von x wäre. Analog argumentiert man $p \notin [z, z']$. Also liegt p auf der Geodäte $[c(a), c(b)]$, also liegt nach Wahl von x schon der ganze Weg p in der 2δ -Umgebung von $[c(a), c(b)]$.

Fall 2: $l(c|_{[a,t]}) \leq 4\delta$ oder $l(c|_{[t,b]}) \leq 4\delta$

Sei ohne Einschränkung $l(c|_{[a,t]}) \leq 4\delta$. Dann konstruiert man ähnlich wie zuvor einen Teilweg c' , mit $l(c') \in (8\delta, k)$, jedoch gilt nun $y = y' = c(a)$ (nach Notation wie in Fall 1) und x ist nicht mehr der Mittelpunkt von c' . Jedoch fallen dann auch $[y, z] = im(c')$ und $[c(a), z]$ zusammen und man erhält ein geodätisches

Dreieck $\Delta(c(a), z, z')$. Nach Argumentation wie in Fall 1 liegt x (und damit ganz c') sogar in der δ -Umgebung von $[c(a), c(b)]$. ■

Korollar 2.6

Sei X ein δ -hyperbolischer, geodätischer Raum und $c : [a, b] \rightarrow X$ eine k -lokale Geodäte, mit $k > 8\delta$. Dann ist c entweder konstant, oder $c(a) \neq c(b)$.

Beweis. Sei $c(a) = c(b)$. Dann gilt nach Satz 2.5: $im(c) \subseteq B(c(a), 2\delta)$, also $l(c) < 4\delta$. Also ist c eine Geodäte in einem Punkt, und somit konstant. ■

In einem Cayleygraphen korrespondieren die geschlossenen Wege (Schleifen) gerade den der Identität entsprechenden Wörtern, was einen vielleicht schon ahnen lässt, wie - oder zumindest dass - obiges Korollar hilfreich sein kann.

In Hinsicht auf die Schleifen muss noch ein weiterer Begriff eingeführt werden.

Definition 2.7

Sei $G = \langle A | R \rangle$ eine Gruppe und w ein Wort in den Erzeugern von G , welches die Identität repräsentiert. Dann ist der Flächeninhalt von w (bzgl. R) durch

$$Area_R(w) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \prod_{i=1}^k x_i r_i x_i^{-1} = w, x_i \in G, r_i \in R, \forall i \in \{1, \dots, k\}\}$$

definiert.

Der gruppentheoretisch definierte Begriff des Flächeninhalts hängt eng mit dem Begriff der Triangulierung bzw. der ρ -Füllung einer Fläche aus der Topologie zusammen. Auch hier ist die Schnittstelle wieder der Cayleygraph von G und das Produkt $\prod_{i=1}^k x_i r_i x_i^{-1} = w$ ist „beinahe“ eine Triangulierung von der zu w gehörenden Schleife im Cayleygraphen.

Durch den folgenden Satz, der auch der letzte Baustein für den Beweis von Satz 2.3 ist, erhält man einen Zusammenhang zu hyperbolischen Gruppen.

Satz 2.8

Sei $G = \langle A | R \rangle$ eine endliche Präsentation einer Gruppe. Wenn eine Konstante $K > 0$, mit $Area_R(w_c) \leq Kl(c) + K$ für jede Schleife c in $\Gamma(G, A)$ existiert, dann ist $\Gamma(G, A)$ schon δ -hyperbolisch für ein $\delta > 0$. Dabei ist w_c das zu c gehörende Wort in den Erzeugern von G (welches die Identität repräsentiert).

Diesen Satz zu beweisen würde den Rahmen dieses Seminarvortrags bei Weitem überschreiten. Von daher sei hier für den allgemeinen Fall eines metrischen Raumes auf die Literatur verwiesen (Kapitel III.H, Theorem 2.9, Bridson-Haefliger [1]).

Beweis von Satz 2.3. Sei $G = \langle A|R \rangle$ eine hyperbolische Gruppe und $\Gamma(G, A)$ δ -hyperbolisch. Wähle $k > 8\delta$ fest.

Nach Kontraposition von Korollar 2.6 enthält dann jede Schleife c in $\Gamma(G, A)$ einen nicht-geodätischen Teilpfad p von Länge $l(p) \leq k$. Somit existiert zu einem solchen p eine Geodäte q mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Bezeichnen nun u und v die zu den Pfaden p bzw. q gehörenden Wörter, so gelten offenbar $u =_G v$, sowie $|v| < |u|$ ($\Leftrightarrow l(q) < l(p)$).

Es sei $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ die Menge aller reduzierten Wörter über $A \cup A^{-1}$, mit Wortlänge kleiner oder gleich k , die keine Geodäte in $\Gamma(G, A)$ darstellen und $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ die Menge aller Wörter, sodass v_i die zu u_i gehörende Geodäte darstellt. Dann erfüllen die u_i, v_i die Bedingung an den dehnschen Algorithmus, und $\tilde{R} := \{u_1 v_1^{-1}, \dots, u_n v_n^{-1}\}$ liefert eine Dehn-Präsentation $G = \langle A|\tilde{R} \rangle$.

Sei nun umgekehrt G eine beliebige Gruppe mit Dehn-Präsentation $G = \langle A|R \rangle$. Nach Satz 2.8 ist dann nur zu zeigen, dass $Area_R(w) \leq K|w| + K$, für ein $K > 0$ und für jedes Wort w , welches die Identität repräsentiert, gilt. Tatsächlich gilt sogar $Area_R(w) \leq |w|$.

Sei also w ein solches Wort, dann existiert eine Relation $uv^{-1} \in R$, sodass u ein Teilwort von w ist. Es folgt

$$w = xuy = xuv^{-1}vy = xuv^{-1}x^{-1}xvy.$$

Es ist wegen $u =_G v$ schon $1 =_G w =_G w' = xvy$, und es gilt $|w| > |w'|$. Iteratives vorgehen liefert eine Darstellung

$$w = \prod_{i=1}^k x_1 u_i v_i^{-1} x_i^{-1},$$

wobei $k \leq |w|$ gilt, da der Rest w' mit jedem Abspalten eines Kojugats kürzer wird. Somit gilt $Area_R(w) \leq |w|$ und die G ist hyperbolisch. ■

Nun, da die Existenz eines Algorithmus' zu Lösbarkeit des Wortproblems nachgewiesen wurde, liegt es nahe zu sagen, das Wortproblem sei für hyperbolische

Gruppen lösbar. Das ist anhand des Gegebenen aber praktisch nicht klar; angenommen man hat eine beliebige Präsentation $G = \langle A|R \rangle$ einer hyperbolischen Gruppe gegeben, wie stellt man fest, ob diese eine Dehn Präsentation ist, und wenn nicht, wie man aus der gegebenen eine Dehn-Präsentation erhält? Wie stellt man überhaupt fest, ob eine Präsentation hyperbolisch ist?

Praktisch führt das zu einer eingeschränkten Lösung des Wortproblems. Wendet man den Dehn-Algorithmus mit einer beliebigen Präsentation an, so erhält man in manchen Fällen das Ergebnis $w =_G 1$, in den restlichen Fällen das Gegenteil nicht unbedingt erfüllt.

Literatur

- [1] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer, 1999.