Das schwache Banach-Tarski-Paradoxon

Kamran Alizadeh Rad

10. Oktober 2017

Das Banach-Tarski-Paradoxon ist neben den Vitali-Mengen ein klassisches Beispiel dafür, dass nicht alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messbar sein können. Das eigentliche Paradoxon ergibt sich durch den Vergleich des mathematischen Resultats mit der geometrischen Intuition bzw. der physikalischen Realität. In einem gewissen Sinne zeigt das Banach-Tarski-Paradoxon damit eine Grenze bei der Beschreibung der uns umgebenden Geometrien mittels Vektorräume. Im Folgenden werde ich das „schwache Banach-Tarski-Paradoxon" zeigen, welches anschaulich besagt:

Eine Vollkugel kann in endlich viele Teile zerlegt werden so, dass diese sich mittels Rotationen und Translationen in zwei Vollkugeln der ursprünglichen Größe zusammensetzen lassen.

Hierfür verwende ich als Quelle die Seiten 1–6 aus dem Buch *Lectures on Amenability* von Volker Runde.

Generalvoraussetzung: Im Folgenden sei, wenn nicht anders behauptet, G eine Gruppe, welche auf einer nichtleeren Menge X wirkt.

Definition 1. Die Teilmenge $E \subseteq X$ heißt *G-paradox*, wenn es paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_m,\ B_1, \dots, B_n \subseteq E$ und $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in G$ gibt, sodass $\bigcup_{i=1}^m g_i \cdot A_i = E = \bigcup_{j=1}^n h_j \cdot B_j$.

Ist $E \subseteq X$ H-paradox für ein $H \leq G$, dann ist E offensichtlich auch G-paradox.

Theorem 2. *Die freie Gruppe $X = E = F_2 = \langle a, b \mid \rangle$ ist F_2-paradox.*

Beweis. Für $x \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ definiere

$$W(x) := \{w \in F_2 \mid w \text{ beginnt mit } x\}.$$

Dann ist

$$F_2 = \{1\} \dot\cup W(a) \dot\cup W(b) \dot\cup W(a^{-1}) \dot\cup W(b^{-1}).$$

Sei $w \in F_2 \setminus W(a)$. Dann ist $a^{-1}w \in W(a^{-1})$ und $w = a(a^{-1}w) \in a \cdot W(a^{-1})$. Also folgt $F_2 = W(a) \cup a \cdot W(a^{-1})$ und analog $F_2 = W(b) \cup b \cdot W(b^{-1})$. $\square$

Proposition 3. *Sei G eine G-paradoxe Gruppe, welche frei auf X wirkt (d.h. $\forall g \in G\ \forall x \in X : g \cdot x = x \Rightarrow g = 1$). Dann ist X ebenfalls G-paradox.*

Beweis. Seien $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n \subseteq G$ und $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$ wie in Definition 1. Sei M eine Menge, die aus jedem G-Orbit $G \cdot x$, $x \in X$, genau ein Element enthält. Die Konstruktion dieser Menge erfordert i.A. das Auswahlaxiom. Dann ist $\{g \cdot M \mid g \in G\}$ eine disjunkte Zerlegung von X, denn $\bigcup_{g \in G} g \cdot M = \bigcup_{x \in M} G \cdot x = X$. Ist $g \cdot x = h \cdot y$ für $g, h \in G$ und $x, y \in M$, so müssen x und y wegen $h^{-1}g \cdot x = y$ im selben G-Orbit liegen. Nach Definition von M ist dann $x = y$. Da G frei auf X wirkt, ist $h^{-1}g = 1$.
Seien nun $A_i^* = \bigcup\{g \cdot M \mid g \in A_i\} \subseteq X$, $i = 1, \ldots, m$, und $B_j^* = \bigcup\{g \cdot M \mid g \in B_j\} \subseteq X$, $j = 1, \ldots, n$. Diese sind paarweise disjunkt, da die $g \cdot M$ und die A_i, B_j es sind und es gilt

$$\bigcup_{i=1}^{m} g_i \cdot A_i^* = \bigcup_{i=1}^{m} g_i A_i \cdot M = (\bigcup_{i=1}^{m} g_i A_i) \cdot M = G \cdot M = X = \bigcup_{j=1}^{n} h_j \cdot B_j^*.$$

$\square$

Wir wissen nun, dass die Eigenschaft F_2-paradox zu sein sich unter einer kleinen Zusatzbedingung von F_2 auf Mengen überträgt, auf die diese Gruppe wirkt. Offenbar wäre es sehr nützlich, um das Hauptresultat zu zeigen, wenn es eine Gruppenwirkung von F_2 auf den $\mathbb{R}^3$ gäbe. Dies ist auch der Fall und ergibt sich, indem wir F_2 als Untergruppe in die Gruppe der Rotationen einbetten.

Theorem 4. *Es gibt eine Untergruppe von $SO(3)$, die isomorph zu F_2 ist.*

Beweis. Seien

$$A^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und seien w_1 und w_2 reduzierte Wörter in $A^{\pm 1}, B^{\pm 1}$, welche auf $A^{\pm 1}$ bzw. $B^{\pm 1}$ enden. Wir zeigen durch Induktion nach der Wortlänge $k \geq 1$:

$$w_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $3 \nmid b$. Für $k = 1$ ist $w_1 = A^{\pm 1}$ und wir erhalten

$$w_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $k \geq 1$, also $w_1 = A^{\pm 1} w'$ oder $w_1 = B^{\pm 1} w'$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$w' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k-1}} \begin{pmatrix} a' \\ b'\sqrt{2} \\ c' \end{pmatrix}$$

mit $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ und $3 \nmid b'$. Daraus folgt

$$w_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^k} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{cases} a = a' \mp 4b', b = b' \pm 2a', c = 3c', & \text{falls } w_1 = A^{\pm 1} w'; \\ a = 3a', b = b' \mp 2c', c = c' \pm 4b', & \text{falls } w_1 = B^{\pm 1} w'. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Zu zeigen bleibt also, dass $3 \nmid b$. Seien $s_1, s_2 \in \{\pm 1\}$.

1. Fall: $w_1 = A^{s_1} B^{s_2} v$

Dann ist $b = b' \mp 2a'$ mit $3 \mid a'$. Da $3 \nmid b'$, folgt $3 \nmid b$.

2. Fall: $w_1 = B^{s_1} A^{s_2} v$

Dann ist $b = b' \mp 2c'$ mit $3 \mid c'$. Da $3 \nmid b'$, folgt $3 \nmid b$.

3. Fall: $w_1 = A^{\pm 1} A^{\pm 1} v$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{k-2}} \begin{pmatrix} a'' \\ b''\sqrt{2} \\ c'' \end{pmatrix}$$

mit $a'', b'', c'' \in \mathbb{Z}$ und $3 \nmid b''$. Es folgt

$$b = b' \pm 2a' = b \pm 2(a'' \mp 4b'') = b' + b'' + \pm 2a'' - 9b'' = 2b' - 9b''$$

und somit $3 \nmid b$.

4. Fall: $w_1 = B^{\pm 1} B^{\pm 1} v$

Zeigt man analog zum 3. Fall.

Wegen $3 \nmid b$ gilt insbesondere $b \neq 0$ und somit

$$w_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analoges sieht man für w_2 und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit ist die Wirkung aller nichtleerer reduzierter Wörter w auf den $\mathbb{R}^3$ ungleich der Identität und es gilt $w \neq 1$ in SO(3). Dann gibt es keine Relationen zwischen A und B, also ist $\langle A, B \rangle \cong F_2$. $\square$

Theorem (Hausdorff-Paradoxon) 5. *Es gibt eine abzählbare Teilmenge D der 2-Sphäre S^2, sodass $S^2 \setminus D$ SO(3)-paradox ist.*

Beweis. Seien $A, B \in$SO(3) wie in Theorem 4, d.h. $H := \langle A, B \rangle \cong F_2$. Da dies Rotationen sind, hat jedes $w \in H \setminus \{1\}$ genau zwei Fixpunkte in S^2. Dann ist die Menge

$$D := \{x \in S^2 \mid \exists w \in H \setminus \{1\} : x \text{ ist Fixpunkt von } w\}$$

abzählbar. Die Gruppe H wirkt dann frei auf $S^2 \setminus D$. Diese Menge ist dann nach Proposition 3 H-paradox und somit auch SO(3)-paradox. $\square$

Definition 6. Seien $A, B \subseteq X$. Dann heißen A und B *G-äquivalent* (i.Z. $A \sim_G B$), wenn es $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$, $B_1, \ldots, B_n \subseteq B$ und $g_1, \ldots, g_n \in G$ gibt, derart dass:

(i) $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i$ und $B = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} B_i$;

(ii) $g_i \cdot A_i = B_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Offensichtlich ist dies eine Äquivalenzrelation.

Lemma 7. *Sei $E \subseteq X$. E ist genau dann G-paradox, wenn es disjunkte $A, B \subseteq E$ gibt mit $A, B \sim_G E$.*

Beweis. $\Leftarrow$: Trivial. Man gehe streng nach den Definitionen vor.
$\Rightarrow$: Seien $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m, \tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_n \subseteq E$ und $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$ wie in Definition 1. Sei $\tilde{A} := \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} \tilde{A}_i$. Wir haben eine Korrespondenz zwischen den $\tilde{A}_i$ und den $g_i \tilde{A}_i$, aber die $g_i \tilde{A}_i$ sind nicht notwendigerweise paarweise disjunkt. Um dies zu erreichen, entfernen wir, wann immer $g_i \cdot a_i = g_j \cdot a_j$ für $a_i \in \tilde{A}_i$, $a_j \in \tilde{A}_j$ für $i \neq j$ auftritt, das Element a_i aus $\tilde{A}_i$ und lassen $\tilde{A}_j$ unberührt. Dann erhalten wir neue Mengen $A_i \subseteq \tilde{A}_i$, $i = 1, \ldots, m$, $A := \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} A_i \subseteq \tilde{A}$ und $E = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} g_i A_i$. Die Konstruktion von B erfolgt analog. $\square$

Lemma 8. *Seien $A, B, D_1, D_2, E_1, E_2 \subseteq X$. Dann gelten:*

(i) Ist $A \sim_G B$, dann gibt es eine Bijektion $\phi : A \to B$ mit $C \sim_G \phi(C)$ für alle $C \subseteq A$.

(ii) Ist $D_1 \cap D_2 = \emptyset = E_1 \cap E_2$ mit $D_1 \sim_G E_1$ und $D_2 \sim_G E_2$, dann ist $D_1 \cup D_2 \sim_G E_1 \cup E_2$.

Beweis. (i) Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq A$, $B_1, \dots, B_n \subseteq B$ und $g_1, \dots, g_n \in G$ wie in Definition 6. Dann ist $\phi : A \to B, a_i \mapsto g_i a_i$ mit $a_i \in A_i$ und $i = 1, \dots, n$ offenbar eine Bijektion. Sei nun $C \subseteq A$. Durch $A_1 \cap C$, $\dots, A_n \cap C \subseteq C$, $\phi(A_1 \cap C), \dots, \phi(A_n \cap C) \subseteq \phi(C)$ und $g_1, \dots, g_n \in G$ erhält man die gewünschten Zerlegungen.

(ii) Nach Definition 6 gibt es für $i = 1, 2$ Zerlegungen $D_i^{(1)}, \dots, D_i^{(m_i)} \subseteq D_i$, $E_i^{(1)}, \dots, E_i^{(m_i)} \subseteq E_i$ und $g_i^{(1)}, \dots, g_i^{(m_i)} \in G$ mit

$$\dot{\bigcup_{j=1}^{m_i}} D_i^{(j)} = D_i, \quad \dot{\bigcup_{j=1}^{m_i}} E_i^{(j)} = E_i$$

und

$$g_i^{(j)} \cdot D_i^{(j)} = E_i^{(j)}, \ j = 1 \dots, m_i.$$

Dann ist $D_1^{(1)}, \dots, D_1^{(m_1)}, D_2^{(1)}, \dots, D_2^{(m_2)}$ bzw. $E_1^{(1)}, \dots, E_1^{(m_1)}, E_2^{(1)}$, $\dots, E_2^{(m_2)}$ eine Zerlegung von $D_1 \cup D_2$ bzw. $E_1 \cup E_2$. Mit $g_1^{(1)}, \dots, g_1^{(m_1)}$, $g_2^{(1)}, \dots, g_2^{(m_2)}$ erfüllen diese dann die gewünschten Bedingungen. □

Proposition 9. *Sei $D \subseteq S^2$ abzählbar. Dann gilt $S^2 \sim_{SO(3)} S^2 \setminus D$.*

Beweis. Sei L eine Gerade durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$ mit $L \cap D = \emptyset$. Sei $\rho(\alpha) \in$SO(3) die Rotation mit Achse L um den Winkel α. Wir definieren

$$W := \{\theta \in [0, 2\pi) \mid \exists x \in D \exists n \in \mathbb{N} : \rho(n\theta) \cdot x \in D\}.$$

Diese Menge ist abzählbar, also gibt es $\alpha \in [0, 2\pi) \setminus W$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt dann $\rho(m\alpha)D \cap D = \emptyset$ und somit auch $\rho(m\alpha)D \cap \rho(n\alpha)D = \emptyset$ für $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Sei $\tilde{D} := \dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} \rho(n\alpha)D$. Dann erhalten wir mit Lemma 8 (ii):

$$S^2 = \tilde{D} \cup (S^2 \setminus \tilde{D}) \sim_{\mathrm{SO}(3)} \rho(\alpha)\tilde{D} \cup (S^2 \setminus \tilde{D}) = S^2 \setminus D$$

□

Die Nützlichkeit des Begriffes der *G-Äquivalenz* dürfte in der nächsten Proposition klar werden.

Proposition 10. *Seien $E, E' \subseteq X$ mit $E \sim_G E'$. Ist E G-paradox so auch E'.*

Beweis. Seien $A, B \subseteq E$ disjunkt mit $A, B \sim_G E$. Wegen $E \sim_G E'$ gilt dann $A, B \sim_G E'$. Nach Lemma 8 (i) gibt es eine Bijektion $\phi : E \to E'$ mit $C \sim_G \phi(C)$ für alle $C \subseteq E$. Also sind $A \sim_G \phi(A)$ und $B \sim_G \phi(B)$ und somit auch $\phi(A), \phi(B) \sim_G E'$. Da A, B disjunkt sind und ϕ eine Bijektion ist, sind auch $\phi(A), \phi(B)$ disjunkt. Dann ist E' nach Lemma 7 G-paradox. $\square$

Korollar 11. *S^2 ist SO(3)-paradox.*

Beweis. Nach Theorem 5 ist gibt es eine abzählbare Menge $D \subseteq S^2$, so dass $S^2 \setminus D$ SO(3)-paradox ist. Mit Proposition 9 folgt $S^2 \sim_{\mathrm{SO}(3)} S^2 \setminus D$ und nach Proposition 10 ist dann S^2 ebenfalls SO(3)-paradox. $\square$

Korollar (Schwaches Banach-Tarski-Paradoxon) 12. *Sei $G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$ die Gruppe der eigentlichen Bewegungen des $\mathbb{R}^3$ (d.h. Translationen und Rotationen, aber keine Spiegelungen). Dann ist jeder abgeschlossene Ball im $\mathbb{R}^3$ G-paradox.*

Beweis. Sei $B_1(0)$ der abgeschlossene Einheitsball. Wir zeigen zuerst, dass $B_1(0) \setminus \{0\}$ SO(3)-paradox ist. Da S^2 SO(3)-paradox ist, gibt es $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_n \subseteq S^2$ und $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in$SO(3) wie in Definition 1. Seien

$$A_i^* := \{tx \mid t \in (0,1], x \in A_i\},\ i = 1, \ldots, m$$

und

$$B_j^* := \{tx \mid t \in (0,1], x \in B_j\},\ j = 1, \ldots, n.$$

Nun gilt offenbar $\bigcup\limits_{i=1}^{m} g_i A_i^* = B_1(0) \setminus \{0\} = \bigcup\limits_{j=1}^{n} h_j B_j^*$ und $B_1(0) \setminus \{0\}$ ist somit SO(3)-paradox und insbesondere G-paradox.
Sei $A \in$SO(3) eine Rotation unendlicher Ordnung um die z-Achse und $\rho_n \cdot x := xA^n + (\frac{1}{2}, 0, 0)$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist $\rho_n \in G$. Sei $D := \{\rho_n \cdot (0,0,0) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0,0)\}$. Dann ist $\rho_1 \cdot D = D \setminus \{0\}$ und wir erhalten

$$B_1(0) = D \cup B_1(0) \setminus D \sim_G \rho_1 \cdot D \cup B_1(0) \setminus D = B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Damit ist auch $B_1(0)$ G-paradox. $\square$