Das starke Banach-Tarski Paradox und Satz von Tarski (Teil I)

Lukas Fischer

17. Oktober 2017

Die folgenden Inhalte entstammen dem Buch „*Lectures on Amenability*“ von VOLKER RUNDE, insbesondere den Seiten 6 bis 11.

Folgende Kenntnisse werden im weiteren Vortrag benutzt:

Eine Gruppe G operiert auf einer Menge M, wenn einem Element $g \in G$ und $m \in M$ ein Element $g \cdot m$ zugeordnet wird, so dass folgende Bedingungen $\forall g_1, g_2 \in G,\ m \in M$ erfüllt sind:

i) $(g_1 g_2) \cdot m = g_1 \cdot (g_2 \cdot m)$

ii) $e_G \cdot m = m$

Sei G eine Gruppe und X eine nicht-leere Menge. Wir nennen $E \subset X$ G-paradox, falls eine Zerlegung in paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ von E existiert mit $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$, so dass $\cup_{j=1}^{n} g_j \cdot A_j = E = \cup_{j=1}^{m} h_j \cdot B_j$

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und seien $A, B \subset X$. A und B heißen G-äquizerlegbar, wenn $\exists\, A_1, \ldots, A_n \subset A, B_1, \ldots, B_n \subset B, g_1, \ldots, g_n \in G$, so dass:

i) $A = \cup_{j=1}^{n} A_j$ und $B = \cup_{j=1}^{n} B_j$,

ii) $A_j \cap A_k = \emptyset = B_j \cap B_k \quad \forall j, k = 1, \ldots, n, j \neq k$

iii) $g_j \cdot A_j = B_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$

Sind nun A und B G-äquizerlegbar, so schreiben wir $A \sim_G B$ oder manchmal auch $A \sim B$. Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Weiterhin gilt für $A, B, A_1, A_2, B_1, B_2 \subset X$:

i) Wenn $A \sim B$, dann existiert eine Bijektion $\phi : A \to B$ mit $C \sim \phi(C) \quad \forall C \subset A$

ii) Wenn $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ mit $A_1 \sim B_1$ und $A_2 \sim B_2$, so gilt: $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$

Korollar (Schwaches Banach-Tarski Paradox) Jede geschlossene Kugel im $\mathbb{R}^3$ ist paradox.

Korollar Der $\mathbb{R}^3$ ist paradox.

Definition 0.1.12. *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und seien $A, B \subset X$. Im Weiteren schreiben wir $A \preceq_G B$ oder $A \preceq B$, wenn A und eine Teilmenge von B G-äquizerlegbar sind.*
Dies ist eine reflexive, transitive Relation auf $\mathcal{P}(X)$.

Theorem 0.1.13. *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und seien $A, B \subset X$, für die gelte $A \preceq_G B$ und $B \preceq_G A$. Dann ist $A \sim_G B$.*

Beweis. Sei $B_1 \subset B$ und sei $A_1 \subset A$, so dass $A \sim_G B_1$ und $B \sim_G A_1$. Seien $\phi : A \to B_1$ und $\psi : B \to A_1$ Bijektionen. Sei $C_0 := A \setminus A_1$ und definiere rekursiv $C_{n+1} := \psi(\phi(C_n))$. Sei $C := \cup_{n=0}^{\infty} C_n$. Es folgt, dass $\psi^{-1}(A \setminus C) = B \setminus \phi(C)$. Daraus folgt $A \setminus C \sim B \setminus \phi(C)$. Analog gilt $C \sim \phi(C)$. Somit folgt

$$A = (A \setminus C) \cup C \sim (B \setminus \phi(C)) \cup \phi(C) = B.$$

□

Theorem 0.1.14 (Banach-Tarski Paradox, Auswahlaxiom (Axiom of choice, AC))**.** *Seien A und B beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ mit nicht-leerem Inneren. Dann ist $A \sim B$.*

Beweis. Aufgrund von Symmetrie und Theorem 0.1.13 genügt es zu zeigen, dass $A \preceq B$. Da A weiter beschränkt ist, existiert ein $r > 0$, so dass $A \subset$

$B_r(0)$. Hierbei sei diese und alle weiteren Kugeln als im $\mathbb{R}^3$ liegend und als abgeschlossen zu verstehen. Sei nun weiter $x \in \mathring{B}$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset B$.
Da $B_r(0)$ kompakt ist, gibt es invertierbare Isometrien (etwa Translationen) $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$B_r(0) \subset g_1 \cdot B_\varepsilon(x) \cup \cdots \cup g_n \cdot B_\varepsilon(x).$$

Wähle nun Isometrien $h_1, \ldots, h_n$ mit $h_j \cdot B_\varepsilon(x) \cap h_k \cdot B_\varepsilon(x) = \emptyset$ für $j \neq k$ (erneut genügen Translationen). Sei $S \coloneqq \cup_{j=1}^n h_j \cdot B_\varepsilon(x)$. Dann folgt aus dem schwachen Banach-Tarski Paradox (Korollar 0.1.10), dass $S \preceq B_\varepsilon(x)$. Somit folgt:

$$A \subset B_r(0) \subset g_1 \cdot B_\varepsilon(x) \cup \cdots \cup g_n \cdot B_\varepsilon(x) \preceq S \preceq B_\varepsilon(x) \subset B$$

Dies beendet den Beweis. □

0.2 Satz von Tarski

Ein Hauptbestandteil des Beweises des Banach-Tarski Paradox war es, dass $\mathbb{F}_2$ nicht amenabel ist. Amenabilität ist im Allgemeinen recht kompliziert, bei diskreten Gruppen genügt jedoch, dass diese nicht paradox ist. Die Äquivalenz dieser beiden Eigenschaften wird durch folgendes Theorem sichergestellt:

Theorem 0.2.1 (Tarski, AC)**.** *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert und sei weiter E eine Teilmenge von X. Dann existiert eine endliche additive, G-invariante Mengenfunktion $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ mit $\mu(E) \in (0,\infty)$ genau dann, wenn E nicht paradox ist.*

Zum Beweis der schwierigen Richtung dieses Theorems – der Rückrichtung – benötigen wir einige Vorbereitungen.
Wir beginnen mit einigen Begriffen der Graphen-Theorie: Ein (ungerichteter) Graph ist ein Tripel (V,E,ϕ), wobei V und E nicht-leere Mengen sind und ϕ eine Funktion von E in die ungeordneten Paare von Elementen aus V ist. Die Elemente aus V heißen *Vertizes*, die Elemente aus E heißen *Kanten*. Sind nun $e \in E$ und $v, w \in V$ mit $\phi(e) = (v,w)$, so sagen wir, dass e v und w verbindet oder dass v und w die Endpunkte von e sind, als (etwas unsaubere) Sprechweise werden wir e manchmal mit seinem Bild unter ϕ identifizieren. Ein Weg in (V,E,ϕ) ist eine endliche Sequenz $(e_1,\dots,e_n)$ von Kanten mit einer endlichen Sequenz $(v_0,\dots,v_n)$ von Vertizes, so dass v_0 ein Endpunkt von e_1, v_n von e_n, v_j von e_j für $j = 1,\dots n-1$ ist. Wir sagen, v_0 und v_n werden durch diesen Weg verbunden. Weiterhin sagen wir, dass der leere Weg jeden Vertex mit sich selbst verbindet.

Definition 0.2.2. *Sei (V,E,ϕ) ein Graph und $k \in \mathbb{N}$.*

i) Ist jeder Vertex Endpunkt von genau k Kanten, so heißt (V,E,ϕ) k-regulär.

ii) Ist $V = X \,\dot\cup\, Y$ und jede Kante hat einen Endpunkt in X und einen in Y, so heißt (V,E,ϕ) zweigeteilt.
In diesem Fall werden wir von (X,Y,E,ϕ) als zweigeteilten Graphen sprechen.

Definition 0.2.3. *Sei* (X, Y, E, ϕ) *ein zweigeteilter Graph mit* $A \subset X$ *und* $B \subset Y$*. Eine perfekte Zuordnung von* A *und* B *ist eine Teilmenge* F *von* E*, so dass:*

i) jedes Element aus $A \cup B$ *ist Endpunkt genau eines* $f \in F$ *und*

ii) alle Endpunkte der Kanten aus F *sind in* $A \cup B$*.*

Theorem 0.2.4 (Königs Theorem, AC)**.** *Sei* (X, Y, E, ϕ) *ein zweigeteilter,* k*-regulärer Graph für ein* $k \in \mathbb{N}$*. Dann existiert eine perfekte Zuordnung von* X *und* Y*.*

Der Beweis wird hier ausgelassen, man findet ihn etwa in:
John Adrian Bondy und Uppaluri Siva Ramachandra Murty. *Graph theory with applications*. Bd. 290. Macmillan London, 1976, p.73.

Königs Theorem war nur der erste Schritt des Beweises des Satzes von Tarski. Der nächste Schritt ist jeder Gruppenoperation auf einer Menge ein Objekt zuzuordnen, dass Halbgruppe dieser Operation genannt wird. Um dies zu tun, werden wir zunächst die Definition der Operation erweitern:

Definition 0.2.5. *Sei* G *eine Gruppe, die auf einer Menge* X *operiert.*

i) Definiere $X^* := X \times \mathbb{N}_0$ *und*

$$G^* := \{(g, \pi) \mid g \in G, \pi \textit{ ist eine Permutation von } \mathbb{N}_0\}$$

und definiere eine Operation von G^* *auf* X^* *durch*

$$(g, \pi) \cdot (x, n) := (g \cdot x, \pi(n)) \qquad \textit{für } (g, \pi) \in G^*, (x, n) \in X^*.$$

ii) Für $A \subset X^*$ *werden solche* $n \in \mathbb{N}_0$ *für die ein Element in* A *existiert, dessen zweite Koordinate* n *ist, Niveaus von* A *genannt.*

Definition 0.2.6. *Seien* G*,* X*,* G^**,* X^* *wie in vorheriger Definition.*

i) Eine Menge $A \subset X^*$ *wird beschränkt genannt, falls es endlich viele Niveaus besitzt.*

ii) Wenn $A \subset X^*$ *beschränkt ist, so heißt die Äquivalenzklasse von* A *bezüglich* $\sim_{G^*}$ *der Typ von* A *und wird mit* $[A]$ *bezeichnet.*

iii) Für $E \subset X$ *schreiben wir* $[E] := [E \times \{0\}]$*.*

iv) Seien $A, B \subset X^*$ beschränkt und sei $k \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$B' := \{(b, n+k) \mid (b, n) \in B\} \cap A = \emptyset$$

Definiere $[A] + [B] := [A \cup B']$.

v) Sei

$$\mathcal{S} := \{[A] \mid A \subset X^* \text{ ist beschränkt}\}.$$

So nennt man $(\mathcal{S}, +)$ die Modell-Halbgruppe der Operation von G auf X.

Man prüft leicht, dass $(\mathcal{S}, +)$ tatsächlich ein (kommutativer) Monoid mit Identität $[\emptyset]$ ist.
Im folgenden führen wir eine übliche Schreibweise ein: Wenn $\mathcal{S}$ eine kommutative Halbgruppe ist, so schreiben wir

$$n\alpha := \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{n \text{ mal}} \quad (\alpha \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}).$$

Außerdem schreiben wir $\alpha \leq \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, wenn $\exists\, \gamma \in \mathcal{S}$, so dass $\alpha + \gamma = \beta$.

Theorem 0.2.7 (AC)**.** *Sei $\mathcal{S}$ die Modell-Halbgruppe einer Gruppenwirkung, weiter sei $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $n\alpha = n\beta$. Dann gilt $\alpha = \beta$.*

Beweis. Wenn $n\alpha = n\beta$, so existieren zwei disjunkte, beschränkte G^*-äquizerlegbare Mengen $E, E' \subset X^*$ mit paarweise disjunkten Teilmengen $A_1, \ldots, A_n \subset E$ und $B_1, \ldots, B_n \subset E'$, so dass

- $E = \cup_{j=1}^n A_j$ und $E' = \cup_{j=1}^n B_j$, sowie
- $[A_j] = \alpha$ und $[B_j] = \beta \quad \forall j = 1, \ldots, n$

Sei $\chi : E \to E'$ und für $j = 1, \ldots, n$ seien $\phi_j : A_1 \to A_j$ sowie $\psi_j : B_1 \to B_j$ Bijektionen (Wähle ϕ_1, ψ_1 als Identität). Für jedes $a \in A_1$ und $b \in B_1$ sei

$$\bar{a} := \{a, \phi_2(a), \ldots, \phi_n(a)\} \quad \text{und} \quad \bar{b} := \{b, \psi_2(b), \ldots, \psi_n(b)\}.$$

Definiere nun einen zweigeteilten Graph wie folgt: Sei $X := \{\bar{a} \mid a \in A_1\}$ und $Y := \{\bar{b} \mid b \in B_1\}$. Für jedes $j = 1, \ldots, n$ bilde eine Kante von $\bar{a} \in X$ zu $\bar{b} \in Y$, falls $\chi(\phi_j(a)) \in \bar{b}$. Weiterhin ist dieser Graph n-regulär. Nun folgt aus Königs Theorem, dass es eine perfekte Zuordnung F gibt.
Für jedes $\bar{a} \in X$ gibt es ein $\bar{b} \in Y$ und eine eindeutige Kante $(\bar{a}, \bar{b})$, so

dass $\chi(\phi_j(a)) = \psi_k(b)$ für $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Für beliebige $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ definiere

$$C_{j,k} \coloneqq \{a \in A_1 \mid (\bar{a}, \bar{b}) \in F \text{ und } \chi(\phi_j(a)) = \psi_k(b)\}$$
$$D_{j,k} \coloneqq \{b \in B_1 \mid (\bar{a}, \bar{b}) \in F \text{ und } \chi(\phi_j(a)) = \psi_k(b)\}.$$

Somit ist $\psi_k \circ \chi \circ \phi_j$ eine Bijektion von $C_{j,k}$ zu $D_{j,k}$, also auch $C_{j,k} \sim_{G^*} D_{j,k}$. Da $\{C_{j,k} \mid j, k = 1, \ldots, n\}$ und $\{D_{j,k} \mid j, k = 1, \ldots, n\}$ jeweils disjunkte Zerlegungen von A_1 und B_1 sind, folgt schließlich $A_1 \sim_{G^*} B_1$, also $\alpha = \beta$. $\square$

Das folgende Korollar, das eine weitere Kürzungsrelation liefert, wird beim Beweis des Satzes von Tarski hilfreich sein:

Korollar 0.2.8. *Sei $\mathcal{S}$ die Modell-Halbgruppe einer Gruppenwirkung, weiter sei $\alpha \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $(n+1)\alpha \leq n\alpha$. Dann ist $\alpha = 2\alpha$.*

Beweis. Aus der Annahme erhalten wir

$$2\alpha + n\alpha = (n+1)\alpha + \alpha \leq n\alpha + \alpha = (n+1)\alpha \leq n\alpha.$$

Wiederholt man dieses Argument, so folgt $n\alpha \geq n\alpha + n\alpha = 2n\alpha$. Trivialerweise gilt $n\alpha \leq 2n\alpha$. Insgesamt folgt $n\alpha = 2n\alpha = n(2\alpha)$. Aus dem vorherigen Theorem folgt dann $\alpha = 2\alpha$. $\square$