Satz von Tarski (Teil II)

Armin Wirths

07. November 2017

Vorwort

Dieses Skript ist entstanden auf Basis des zweiten Kapitels des Buches „Lectures on amenability“ von *Volker Runde*. Es wird hauptsächlich um den zweiten Teil des Beweis des Satz von Tarski gehen.

Inhaltsverzeichnis

0 Erinnerung

0.1 Definition Sei G eine Gruppe, die auf einer nichtleeren Menge X operiert. Eine Teilmenge $E \subset X$ heißt G-paradox, wenn es paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \subset E$ und $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n \in G$ gibt, sodass:
$\bigsqcup_{i=1}^{n} g_i \cdot A_i = E$ und $\bigsqcup_{i=1}^{n} h_i \cdot B_i = E$ zwei disjunkte Zerlegungen von E sind.

0.2 Definition Sei G eine Gruppe die auf einer Menge X operiert, und seien $A, B \subset X$ Teilmengen von X. A und B heißen *G-äquizerlegbar*, wenn $A_1, \ldots, A_n \subset A, B_1, \ldots, B_n \subset B$ und $g_1, \ldots, g_n \in G$ existieren, sodass:
(i) $A = \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j$ *und* $B = \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j$
(ii) $g_j \cdot A_j = B_j \quad (j = 1, \ldots, n)$.
Wenn A und B äquizerlegbar sind schreiben wir $A \sim_G B$.

0.3 Definition Sei G eine Gruppe die auf einer Menge X operiert.
(i) Definiere $X^* := X \times \mathbb{N}_0$ und

$$G^* := \{(g, \pi) : g \in G, \text{ und } \pi \text{ ist eine Permutation von } \mathbb{N}_0\},$$

und G^* operiert auf X^* durch

$$(g, \pi) \cdot (x, n) := (g \cdot x, \pi(n)) \quad ((g, \pi) \in G^*, (x, n) \in X^*).$$

(ii) Wenn $A \subset X^*$, dann schreibe $n = \mathcal{P}_2(A)$ wobei eine Projektion ist. Dann heißen die $n \in \mathbb{N}_0$ *Level* von A.

0.4 Definition Sei G, X, G^*, und X^* wie in Definition 0.3.
(i) Eine Menge $A \subset X^*$ heißt *beschränkt*, wenn die Projektion $\mathcal{P}_2(A)$ endlich ist.
(ii) Wenn $A \subset X^*$ beschränkt ist, heißt die Äquivalenzklasse von A bezüglich $\sim_{G^*}$ der Typ von A und wir schreiben $[A]$.
(iii) Wenn $E \subset X$, schreiben wir $[E] := [E \times \{0\}]$.
(iv) Sei $A, B \subset X^*$ beschränkt, $n \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$B' := \{(b, n + k) : (b, n) \in B\} \cap A = \emptyset.$$

Definiere $[A] + [B] := [A \cup B']$.
(v) Sei

$$\mathcal{S} := \{[A] : A \subset X^* \text{ ist beschränkt}\}.$$

Dann heißt $(\mathcal{S}, +)$ die *Typen Halbgruppe* der Gruppenoperation von G auf X.

0.5 Definition Wir schreiben $\alpha \leq \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, wenn $\exists \gamma \in \mathcal{S}$, sodass $\gamma + \alpha = \beta$.

0.6 Satz *Eine Menge $E \subset X$ ist G-paradox genau dann, wenn $[E] = 2[E]$.*

Beweis Sei G eine Gruppe die auf einer nichtleeren Menge X operiert, $E \subset X$ eine Teilmenge von X. Angenommen E ist G-paradox, dann existiert nach Definition 0.1 eine paradoxe Zerlegung $\bigsqcup_{i=1}^{n} g_i \cdot A_i = E$ und $\bigsqcup_{i=1}^{n} h_i \cdot B_i = E$, wobei $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \subset E$ paarweise disjunkte Teilmengen von E sind. Dann gilt

$2[E] = [E] + [E] = [\bigsqcup_{i=1}^{n} g_i \cdot A_i] + [\bigsqcup_{i=1}^{n} h_i \cdot B_i] = [\bigsqcup_{i=1}^{n} g_i \cdot A_i \cup \bigsqcup_{i=1}^{n} h_i \cdot B_i] = [E \cup E] = [E]$. □

0.7 Korollar *Sei $\mathcal{S} := \{[A] : A \subset X^* \text{ ist beschränkt}\}$ wie in Definition 0.3 und sei $\alpha \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $(n+1)\alpha \leq n\alpha$. Dann folgt $\alpha = 2\alpha$.*

Beweis Mit den Bedingungen folgt:

$2\alpha + n\alpha = (n+1)\alpha + \alpha \leq n\alpha + \alpha = (n+1)\alpha \leq n\alpha$. Wiederholtes anwenden liefert

$2n\alpha = n\alpha + n\alpha \leq n\alpha$. Da trivialerweise, $n\alpha \leq 2n\alpha$, folgt

$n\alpha = 2n\alpha = n(2\alpha)$.

Also $\alpha = 2\alpha$. □

1 Satz von Tarski (Teil II)

1.1 Lemma *Sei $\mathcal{S}$ eine kommutative Halbgruppe, sei $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ endlich, und sei $\epsilon \in \mathcal{S}_0$ so, dass $(n_0+1)\epsilon \nleq n_0\epsilon$ für $n_0 \in \mathbb{N}$, und so, dass für jedes $\alpha \in \mathcal{S}$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\alpha \leq n_1\epsilon$. Dann gibt es eine Funktion $\nu : \mathcal{S}_0 \to [0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\nu(\epsilon) = 1$;

(ii) *wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathcal{S}_0$ so, dass $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq \beta_1 + \cdots + \beta_m$, dann*

$$\sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j)$$

Beweis Wir verfahren per Induktion über die Kardinalität von $|\mathcal{S}_0|$.

Wenn $|\mathcal{S}_0| = 1$, dann $\mathcal{S}_0 = \{\epsilon\}$. In diesem Fall erfüllt $\nu(\epsilon) := 1$ (i). Um (ii) zu zeigen, sei $n, m \in \mathbb{N}$ so, dass $n\epsilon \leq m\epsilon$, und wir nehmen an, dass $n \geq m+1$. Dann gilt aber $(m+1)\epsilon \leq n\epsilon \leq m\epsilon$, was der ersten Annahme von ϵ widerspricht.

Wir nehmen nun an, es existiert ein $\alpha_0 \in \mathcal{S}_0 \setminus \{\epsilon\}$. Nach Induktionsannahme existiert eine Funktion $\nu : \mathcal{S}_0 \setminus \{\alpha_0\} \to [0, \infty]$, die (i) und (ii) erfüllt. Da es für jedes $\alpha \in \mathcal{S}$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\alpha \leq n_1\epsilon$, folgt aus (ii), dass ν nur endliche Werte annimmt. Wir erweitern ν zu $\mathcal{S}_0$ durch

$$\nu(\alpha_0) := \inf_{r \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{r} \left(\sum_{j=1}^{p} \nu(\gamma_j) - \sum_{j=1}^{q} \nu(\delta_j) \right) \right\},$$

wobei das Infimum über alle $r \in \mathbb{N}$ geht und $\gamma_1, \ldots, \gamma_p, \delta_1, \ldots, \delta_q \in \mathcal{S}_0 \setminus \{\alpha_0\}$ erfüllen

$$\delta_1 + \cdots + \delta_q + r\alpha_0 \leq \gamma_1 + \cdots + \gamma_p.$$

Es folgt, dass das Infimum über eine nichtleere Menge geht, und dass $\nu(\alpha_0) \geq 0$. Es bleibt zu zeigen, dass ν erweitert immernoch (ii) erfüllt.

Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathcal{S}_0 \setminus \{\alpha_0\}$ und $s, t \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n + s\alpha_0 \leq \beta_1 + \dots + \beta_m + t\alpha_0. \tag{1}$$

Wenn $s = t = 0$ ist, folgt die Behauptung aus der Induktionsannahme.

Fall 1: $s = 0$ und $t > 0$. Wir müssen zeigen, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) \leq t\nu(\alpha_0) + \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j).$$

d. h.

$$\nu(\alpha_0) \geq \frac{1}{t} \left(\sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) - \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j) \right) =: w.$$

Sei $r \in \mathbb{N}$ und $\gamma_1, \dots, \gamma_p, \delta_1, \dots, \delta_q \in \mathcal{S}_0 \setminus \{\alpha_0\}$ erfüllt

$$\delta_1 + \dots + \delta_q + r\alpha_0 \leq \gamma_1 + \dots + \gamma_p. \tag{2}$$

Es genügt zu zeigen, dass

$$\frac{1}{r} \left(\sum_{j=1}^{p} \nu(\gamma_j) - \sum_{j=1}^{q} \nu(\delta_j) \right) \geq w. \tag{3}$$

Aus (1) – merke, dass $s = 0$ ist – erhalten wir durch Multiplikation mit r und Addition des selben Terms auf beiden Seiten:

$$r\alpha_1 + \dots + r\alpha_n + t\delta_1 + \dots + t\delta_q \leq r\beta_1 + \dots + r\beta_m + rt\alpha_0 + t\delta_1 + \dots + t\delta_q.$$

(2) einsetzen ergibt:

$$r\alpha_1 + \dots + r\alpha_n + t\delta_1 + \dots + t\delta_q \leq r\beta_1 + \dots + r\beta_m + t\gamma_1 + \dots + t\gamma_p.$$

Durch Anwendung der Induktionsannahme erhalten wir

$$r\sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) + t\sum_{j=1}^{q} \nu(\delta_j) \leq r\sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j) + t\sum_{j=1}^{n} \nu(\gamma_j),$$

was (3) impliziert.

Fall 2: Angenommen $s > 0$.

Es genügt zu zeigen, dass

$$s\nu(\alpha_0) + \sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) \leq z_1 + \dots + z_t + \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j),$$

wobei $z_1, \dots, z_t$ irgendwelche Zahlen sind, dessen Infimum $\nu(\alpha_0)$ definiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $z_1 = \dots = z_t =: z$. Deshalb müssen wir beweisen, dass

$$s\nu(\alpha_0) + \sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) \leq tz + \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j).$$

Multiplikation von (1) mit r und Addition des selben Terms auf beiden Seiten ergibt:

$$r\alpha_1 + \cdots + r\alpha_n + rs\alpha_0 + t\delta_1 + \cdots + t\delta_q \leq r\beta_1 + \cdots + r\beta_m + rt\alpha_0 + t\delta_1 + \cdots + t\delta_q. \qquad (4)$$

Es sei $\gamma_1, \ldots, \gamma_p, \delta_1, \ldots, \delta_q \in \mathcal{S}_0 \setminus \{\alpha_0\}$ erfüllt (2) mit

$$z = \frac{1}{r}\left(\sum_{j=1}^{p} \nu(\gamma_j) - \sum_{j=1}^{q} \nu(\delta_j)\right).$$

Einsetzten von (2) in (4) ergibt:

$$r\alpha_1 + \cdots + r\alpha_n + t\delta_1 + \cdots + t\delta_q + rs\alpha_0 \leq r\beta_1 + \cdots + r\beta_m + t\gamma_1 + \cdots + t\gamma_p.$$

Aus dieser Ungleichung und der Definition von $\nu(\alpha_0)$ folgt

$$r\sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) + t\sum_{j=1}^{q} \nu(\delta_j) + rs\nu(\alpha_0) \leq r\sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j) + t\sum_{j=1}^{p} \nu(\gamma_j)$$

und durch umformen

$$s\nu(\alpha_0) + \sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) \leq t\frac{1}{r}\left(\sum_{j=1}^{p} \nu(\gamma_j) - \sum_{j=1}^{q} \nu(\delta_j)\right) + \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j) = tz + \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j)$$

Damit ist der Beweis beendet. $\square$

1.2 Definitionen und Sätze

Kompaktheit

Ein Teilmenge Y eines topologischen Raums X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung $Y \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{O}$ eine endliche Teilüberdeckung $Y = \bigcup\limits_{i \in I_0} \mathcal{O}_i$ besitzt, wobei $I_0 \subset I, |I| < \infty$.

Produkttopologie

Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume für eine beliebige Indexmenge I. Sei $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ das kartesische Produkt der Mengen X_i. Dann ist die Produkttopologie definiert durch eine Basis $\mathcal{F} = \{(x_i)_{i \in I} | x_{i_1} \in \mathcal{O}_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}\}$, wobei $\mathcal{O}_i$ offene Mengen sind.

Satz von Tychonoff (ohne Beweis)

Ist $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter topologischer Räume, dann ist auch das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie kompakt.

Endliche Durchschnittseigenschaft

Eine Teilmenge $A \subset X$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft, wenn alle endlichen Durchschnitte von Mengen aus A nicht-leer sind. $\forall N \in \mathbb{N} \; (\bigcap\limits_{n \leq N} A_n \neq \emptyset) \Rightarrow \bigcap\limits_{n \in N} A_n \neq \emptyset$

1.3 Satz (AC) *Sei $(\mathcal{S}, +)$, eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element 0 und sei ϵ ein Element von $(\mathcal{S}, +)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $(n+1)\epsilon \not\leq n\epsilon$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
(ii) *Es gibt einen Homorphismus zwischen Halbgruppen* $\nu : (\mathcal{S}, +) \to ([0, \infty], +)$ *so, dass* $\nu(\epsilon) = 1$.

Beweis (ii) $\Longrightarrow$ (i) Durch Widerspruch. Angenommen $(n+1)\epsilon \leq n\epsilon$. Nach Definition 0.5 von " $\leq$ " $\exists \gamma \in \mathcal{S} : \gamma + (n+1)\epsilon = n\epsilon$. Dann ist $\nu(\gamma) + \nu((n+1)\epsilon) = \nu(n\epsilon)$ wobei $\nu(\gamma) \in [0, \infty]$. Da ν ein Homomorphismus ist mit $\nu(\epsilon) = 1$, folgt $\nu(\gamma) + n + 1 = n$. Ein Widerspruch.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, für jedes $\alpha \in \mathcal{S}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\alpha \leq n\epsilon$ (Falls nicht, definiere später $\nu(\alpha) := \infty$ für die α ohne diese Eigenschaft).

Für jede endliche Teilmenge $\mathcal{S}_0$ von $\mathcal{S}$, die ϵ enthält, sei $M_{\mathcal{S}_0}$ die Menge aller $\kappa : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ so, dass

– $\kappa(\epsilon) = 1$, und
– $\kappa(\alpha + \beta) = \kappa(\alpha) + \kappa(\beta)$ für $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathcal{S}_0$.

Betrachte Lemma 1.1(ii) und seien $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathcal{S}_0$.

Wähle $\alpha_1 = \alpha + \beta$ und $\beta_1 = \alpha, \beta_2 = \beta$. Dann gilt $\nu(\alpha + \beta) \leq \nu(\alpha) + \nu(\beta)$.

Nun wähle $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta$ und $\beta_1 = \alpha + \beta$. Dann gilt $\nu(\alpha) + \nu(\beta) \leq \nu(\alpha + \beta)$. Es folgt die Gleichheit und aus Lemma 1.1 folgt, dass $M_{\mathcal{S}_0} \neq \emptyset$.

Sei $[0, \infty]^{\mathcal{S}} = \prod\limits_{s \in \mathcal{S}} [0, \infty]$ das kartesische Produkt versehen mit der Produkttopologie. Da das Intervall $[0, \infty]$ als topologischer Raum aufgefasst werden kann und kompakt ist, ist auch $[0, \infty]^{\mathcal{S}}$ kompakt nach dem Satz von Tychonoff. Man kann sehen, dass die Menge $M_{\mathcal{S}_0}$ für jede endliche Teilmenge $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ abgeschlossen ist in $[0, \infty]^{\mathcal{S}}$. Dies folgt daraus, dass die Menge $M_{\mathcal{S}_0}$ für fixierte $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathcal{S}_0$ die Ebene $x + y - z = 0$ aufspannt. Diese Ebene ist abgeschlossen in $[0, \infty]^{\mathcal{S}}$. Weiter hat die Familie

$$\{M_{\mathcal{S}_0} : \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S} \text{ ist endlich}\}$$

die endliche Durchschnittseigenschaft. Dafür bemerken wir zunächst, dass

$M_{\mathcal{S}_1} \cap \ldots \cap M_{\mathcal{S}_k} \supseteq M_{\mathcal{S}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_k} \neq \emptyset$. (*)

Weiter nehmen wir an $\bigcap\limits_{s \in \mathcal{S}} \{M_{\mathcal{S}_0} : \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S} \text{ ist endlich}\} = \emptyset$ Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \bigcap_{s \in \mathcal{S}} \{M_{\mathcal{S}_0} : \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S} \text{ ist endlich}\} = \emptyset \\
\Leftrightarrow \quad & \bigcup_{s \in \mathcal{S}} ([0, \infty]^{\mathcal{S}} \setminus M_{\mathcal{S}_0}) = [0, \infty]^{\mathcal{S}} \\
\overset{\substack{Kompaktheit \\ Tychonoff}}{\Rightarrow} \quad & ([0, \infty]^{\mathcal{S}} \setminus M_{\mathcal{S}_1}) \cup \ldots \cup ([0, \infty]^{\mathcal{S}} \setminus M_{\mathcal{S}_k}) = [0, \infty]^{\mathcal{S}} \\
\Leftrightarrow \quad & M_{\mathcal{S}_1} \cap \ldots \cap M_{\mathcal{S}_k} = \emptyset
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (*). Folglich enthält $\bigcap\{M_{\mathcal{S}_0} : \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S} \text{ ist endlich}\}$ mindestens eine Abbildung $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$. Es ist klar, dass $\nu(\epsilon) = 1$, und wenn $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, dann $\nu(\alpha + \beta) = \nu(\alpha) + \nu(\beta)$ wegen $\nu \in M_{\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}}$. $\square$

Wir können nun den Beweis von dem Satz von Tarski zu Ende bringen:

1.4 Satz von Tarski *Sei G eine Gruppe die auf einer Menge X operiert, und sei $E \subset X$ eine Teilmenge. Dann existiert eine Mengenfunktion $\mu : \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$, mit $\mu[E] \in (0, \infty)$ und den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\mu(gA) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathfrak{P}$, $g \in G$ *(G-invariant)*
(ii) $\mu(A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$ *(endlich additiv)*

genau dann, wenn E nicht G-paradox ist.

Beweis " $\Longleftarrow$ " Sei $\mathcal{S}$ eine Halbgruppe der Gruppenoperation von G auf X. Wir nehmen an, dass E nicht G-paradox ist. Wegen Satz 0.6 bedeutet das $[E] \neq 2[E]$, und aus Korollar 0.7 folgt, dass $(n+1)[E] \not\leq n[E]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also impliziert Satz 1.3, dass eine additive Abbildung $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ existiert mit $\nu([E]) = 1$. Dann ist

$$\mu : \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty], \quad A \mapsto \nu([A])$$

die gewünschte Funktion mit $\mu(A \sqcup B) = \nu([A \sqcup B \times \{0\}]) = \nu([A \times \{0\}]) + \nu([B \times \{0\}]) = \mu(A) + \mu(B)$.
$\square$