

# Das von Neumann-Day Problem und die erste Grigorchuk Gruppe

Tobias Liebke

December 10, 2017

## 1 Motivation

Wir wollen zunächst einige Klassen definieren, sei  $EG$  die Klasse aller Gruppen, die von endlichen und abelschen Gruppen erzeugt werden, abgeschlossen unter Betrachtung von Untergruppen, Bildung von Quotienten, Bildung von Erweiterungen und gerichteten Vereinigungen. Sei  $AG$  die Klasse aller amenablen Gruppe und  $NF$  die Klasse aller Gruppen die keine nichtabelschen freien Untergruppen enthalten. Wir wissen bereits,

$$EG \subseteq AG \subseteq NF$$

Das von Neumann-Day Problem beschäftigt sich nun mit der Frage, ob man in diesen Inklusionen  $\subseteq$  durch  $\subsetneq$  ersetzen kann. Die Frage ist also, gibt es eine Gruppe die zwar in  $NF$  liegt aber nicht in  $AG$  und gibt es eine Gruppe die zwar in  $AG$  liegt aber nicht in  $EG$ . Im Jahr 1980 wurde gezeigt, dass  $AG \neq NF$ . Dies geschah indem gezeigt wurde, dass die Tarski Monster Gruppe nicht amenable ist. (Ol'shanskii)

Dieser Vortrag wird zeigen, dass ausserdem auch  $EG \neq AG$  gilt.

## 2 Vorarbeit

**Definition 1** Eine Gruppe hat Torsion, wenn jedes Element endliche Ordnung hat.

**Definition 2** Eine Gruppe heißt lokal endlich, wenn jede endlich erzeugte Untergruppe endliche Ordnung hat.

**Satz 1** Jede Gruppe in  $EG$  mit Torsion ist lokal endlich.

Um dies zu beweisen wollen wir zunächst ein Lemma zeigen

**Lemma 1** Die Klasse  $EG$  wird erzeugt von endlichen und abelschen Gruppen und dem Bilden von Erweiterungen und gerichteten Vereinigungen.

Um nun Lemma 1 zeigen zu können brauchen wir zunächst noch eine Definition und ein weiteres Lemma.

**Definition 3** Definiere  $EG_0$  als die Klasse aller endlichen und abelschen Gruppen. Sei  $\alpha > 0$  ein Ordinal, nehmen wir an  $EG_\beta$  ist bereits definiert für alle  $\beta < \alpha$ . Wenn  $\alpha$  ein Limit Ordinal ist, dann definiere  $EG_\alpha = \bigcup \{EG_\beta \mid \beta < \alpha\}$ , sonst ist  $EG_\alpha$  die Klasse aller Gruppen die aus  $EG_{\alpha-1}$  durch Erweiterungen und gerichtete Vereinigungen entstanden ist.

**Lemma 2** Jedes  $EG_\alpha$  ist abgeschlossen unter der Bildung von Untergruppen und Quotienten.

**Beweis** Zunächst beweisen wir Lemma 2 mithilfe von transfiniter Induktion über  $\alpha$ . Für  $\alpha = 0$  ist dies unmittelbar klar, da  $EG_0$  nur endliche und abelsche Gruppen enthält. Bildung von Untergruppen und von Quotienten sind dann wieder endlich bzw. abelsch.

Angenommen die Behauptung gilt für alle  $\beta < \alpha$ .

Sei nun  $G \in EG_\alpha$ , zu zeigen ist das auch  $B \leq G$  als Untergruppe und  $C = G/N$  als Quotient in  $EG_\alpha$  liegen.

1.Fall:  $\alpha$  ist Limit Ordinal, dann war bereits  $G \in EG_\beta$  für ein  $\beta < \alpha$  und nach Induktionsvoraussetzung somit auch  $B \in EG_\beta$  und  $C \in EG_\beta$ .

2.Fall:  $\alpha$  ist kein Limit Ordinal, dann muss man zwei Fälle unterscheiden:

Es handelt sich um eine Erweiterung dann existiert eine kurze Exakte Sequenz  $1 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$  mit  $K, Q \in EG_{\alpha-1}$ . Dann existiert auch für  $B$  eine solche Sequenz  $1 \rightarrow K \cap B \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow 1$  wobei wegen  $K \cap B \subseteq K$  offensichtlich  $K \cap B \in EG_{\alpha-1}$ . Und wegen  $P = B/(K \cap B) \cong BK/K \leq G/K = Q$  ist auch  $P \in EG_{\alpha-1}$ . Analog gilt dies auch für  $1 \rightarrow K_1 \rightarrow G \rightarrow Q_1 \rightarrow 1$  wobei  $K_1$  und  $Q_1$  homomorphe Bilder von  $K$  und  $Q$  sind.

Ist  $G$  eine gerichtete Vereinigung von Gruppen  $\{G_i\}_{i \in I}$ , dann ist auch  $B$  eine gerichtete Vereinigung von  $\{B \cap G_i\}_{i \in I}$  und  $C$  ist die gerichtete Vereinigung von  $\{\lambda(G_i)\}$  wobei  $\lambda$  die Quotientenabbildung darstellt.  $\square$

Um Lemma 1 zu beweisen genügt es nun zu zeigen, dass  $EG = \bigcup \{EG_\alpha \mid \alpha : \text{Ordinal}\}$ , EG ist aber grade so definiert, dass es die rechte Seite der Gleichung enthält und die rechte Seite ist nach Konstruktion abgeschlossen unter Erweiterungen und gerichteten Vereinigungen und nach Lemma 2 abgeschlossen unter Untergruppen und Quotienten.  $\square$

Nun bleibt noch Satz 1 zu zeigen, dies machen wir erneut mittels transfiniten Induktion über  $\alpha$ . Als Induktionsanfang ist klar, dass die endlichen Gruppen in  $EG_\alpha$  endliche Ordnung haben, die abelschen Gruppen mit Torsion haben ebenfalls endliche Ordnung. Angenommen die Behauptung gilt für alle  $\beta < \alpha$ .

Sei  $G \in EG_\alpha$  eine Gruppe mit Torsion. Wenn  $\alpha$  ein Limit Ordinal ist, dann ist  $G \in EG_{\alpha-1}$  und somit nach Induktionsvoraussetzung lokal endlich. Sei also  $\alpha$  kein Limit Ordinal, Dann ist G entweder eine Erweiterung oder eine gerichtete Vereinigung. Im ersten Fall ist jeden endlich erzeugte Untergruppe  $H \leq G$  ein endliches Bild im Quotient, also hat auch der Kern  $H \cap K$  einen endlichen Index in H, also ist H endlich. Im zweiten Fall sind die Erzeuger einer endlich erzeugten Untergruppe  $H \leq G$  in einigen  $G_i$  enthalten, also ist H endlich.  $\square$

Wir haben nun also ein klares Ziel um  $EG \neq AG$  zu zeigen, wir suchen eine amenable Gruppe mit Torsion die nicht lokal endlich ist.

### 3 Die Grigorchuk Gruppe

**Definition 4** Sei  $T$  der binäre Baum mit unendlich vielen Wurzeln. Die Eckpunkte von  $T$  benennen wir mit endlichen Wörtern aus dem Alphabet  $\{0,1\}$ . Jeder Eckpunkt hat einen eigenen Weg zum Ursprung. Das Level  $k$  ist die Anzahl der Kanten auf diesem Weg. Die Grigorchuk Gruppe ist eine Untergruppe der Automorphismen Gruppe  $\text{Aut}(T)$ . Wir bezeichnen die Grigorchuk Gruppe mit  $\Gamma$ . Sie wird erzeugt von vier Automorphismen, also  $\Gamma = \langle a, b, c, d \rangle$ .

$a$  vertauscht die beiden Unterbäume  $T_0$  und  $T_1$   
 $b$  hält das erste Level fest, und verhält sich dann wie  $(a,c)$ .  
 $c$  hält das erste Level fest, und verhält sich dann wie  $(a,d)$ .  
 $d$  hält das erste Level fest, und verhält sich dann wie  $(1,b)$ .

Bspieelsweise verhält sich  $b$  auf  $T_0$  wie  $a$  und auf  $T_1$  wie  $c$ . Die Verknüpfung der Grigorchuk Gruppe ist einfach die Hintereinanderausführung der Automorphismen. Den Stabilisator der Grigorchuk Gruppe definieren wir als  $St(k) = \{g \in \Gamma \mid \forall x \in \text{Level}(k) : g(x) = x\}$ .

**Proposition 1** Es gilt  $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1$ .

**Beweis** offensichtlich gilt  $a^2 = 1$ , ein zweifaches Vertauschen stellt den Ausgangszustand wieder her.  $b^2 = 1$  zeigen wir nun mittels vollständiger Induktion über  $n$ .

Sei  $n = 1$ , nach Definition vertauscht  $b$  auf dem ersten Level nichts, also auch  $b^2$  nicht. Angenommen  $b^2$  stabilisiert alle Level  $k < n$ .

Es gilt  $b^2 = (a, c)^2 = (a^2, c^2) = (1, c^2)$ , da das Anwenden von Automorphismen auf Unterbäume kommutativ ist. Sei nun  $v \in \text{Level}(n)$ , also  $v = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ . Brachte nun  $b^2(0, j_2, \dots, j_n)$ , dies ist offensichtlich  $(0, 1(j_2, \dots, j_n))$ , also die Identität. Nun betrachte  $b^2(1, j_2, \dots, j_n)$ , dies ist  $(1, c^2(j_2, \dots, j_n))$ , da  $j_2$  bis  $j_n$  nur noch Länge  $n-1$  hat, gilt dies nach Induktionsvoraussetzung. Analog kann man dies für  $c^2$  und  $d^2$  zeigen.  $\square$

**Proposition 2** In der Grigorchuk Gruppe gelten die folgenden Beziehungen:

$$bc = cb = d, cd = dc = b \text{ und } bd = db = c$$

.

**Beweis** Wir beweisen  $bc = d$  mittels vollständiger Induktion über das Level  $n$ . Offensichtlich gilt die Aussage für  $n = 1$  da  $b, c$  und  $d$  das erste Level nicht vertauschen. Angenommen  $bc = d$  gilt für alle Level( $k$ ) mit  $k < n$ . Sei wieder  $v \in \text{Level}(n)$  mit  $v = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ . Es gilt  $bc = (a, c)(a, d) = (a^2, cd) = (1, cd)$ . Auf  $T_0$  ist  $bc$  also die Identität genau wie  $d$ . auf  $T_1$  gilt  $bc(v) = (1, cd(j_2, \dots, j_n))$ , da  $(j_2, \dots, j_n)$  aber nur noch Länge  $n-1$  hat, gilt dies hier nach Induktionsvoraussetzung. Analog beweist man so die anderen Beziehungen.  $\square$

Aus Proposition 2 folgt direkt, dass  $\langle 1, b, c, d \rangle \cong K_4$ , wobei  $K_4$  hier die Kleinsche Vierergruppe repräsentiert.

Man überlegt sich leicht, dass der Stabilisator des ersten Levels eben die Elemente  $b, c$  und  $d$  sind sowie ihre zu  $a$  konjugierten. Wir wissen aus Proposition 2, dass  $d = bc$  ist. Da  $a, b, c$  und  $d$  alle Ordnung 2 haben sind sie selbstinvers. Also gilt:

$$St(1) = \langle b, c, aba, aca \rangle$$

**Definition 5** Definiere  $\psi = (\phi_0, \phi_1) : St(1) \rightarrow \Gamma \times \Gamma$ , als die Abbildung aus dem Stabilisator des ersten Levels auf die Unterbäume  $T_0$  und  $T_1$ . also  $\psi(b) = (a, c)$ ,  $\psi(c) = (a, d)$  und  $\psi(d) = (1, d)$ .

**Proposition 3** Es gilt:  $\psi(aba) = (c, a)$ ,  $\psi(aca) = (d, a)$  und  $\psi(ada) = (b, 1)$ .

**Beweis** Betrachte  $aba(0, j_2, \dots, j_n) = ab(1, j_2, \dots, j_n) = a(1, c(j_2, \dots, j_n)) = (0, c(j_2, \dots, j_n))$  und  $aba(1, j_2, \dots, j_n) = ab(0, j_2, \dots, j_n) = a(0, a(j_2, \dots, j_n)) = (1, a(j_2, \dots, j_n))$ .

Insgesamt also  $\psi(aba) = (c, a)$ . Analog kann man dies für  $aca$  und  $ada$  zeigen.  $\square$

**Proposition 4** Die Abbildung  $\phi_1 : St(1) \rightarrow \Gamma$  ist surjektiv.

**Beweis** Nach Definition gilt  $\phi_1(b) = c$ ,  $\phi_1(c) = d$  und  $\phi_1(d) = b$ , ausserdem gilt nach Proposition 3  $\phi_1(aba) = a$ .  $\phi_1$  bildet also auf alle Erzeuger von  $\Gamma$  und somit auf ganz  $\Gamma$ ,  $\phi_1$  ist also surjektiv.  $\square$

**Satz 2**

$\Gamma$  hat unendliche Ordnung

**Beweis**  $St(1)$  ist eine echte Untergruppe von  $\Gamma$ , zum Beispiel ist  $a$  zwar in  $\Gamma$  jedoch nicht in  $St(1)$  enthalten. Hätte  $\Gamma$  nun endliche Ordnung so wäre die Ordnung von  $St(1)$  echt kleiner als die von  $\Gamma$ , dann kann  $\phi_1$  jedoch nicht mehr surjektiv sein, was es aber nach Proposition 4 ist. Also muss  $\Gamma$  unendliche Ordnung haben.  $\square$

Damit haben wir gezeigt, dass  $\Gamma$  nicht lokal endlich erzeugt ist, da  $\Gamma$  in sich selbst eine Untergruppe ist, die zwar endlich erzeugt ist, jedoch nicht endliche Ordnung hat.

**Definition 6** Sei  $\gamma \in \Gamma$  ein Automorphismus. Wir definieren das Wort  $w$  als die kürzest mögliche Kombination von Buchstaben aus dem Alphabet  $\{a, b, c, d\}$  die  $\gamma$  repräsentiert. Die Länge von  $\gamma$  definieren wir als die Länge des Wortes  $w$ . Für die Länge eines Automorphismus  $\gamma$  schreiben wir  $l(\gamma)$ .

**Proposition 5** Sei  $\gamma \in \Gamma$  mit  $l(\gamma) = 2$ , dann ist  $\gamma^{16} = 1$ .

**Beweis** Wir wissen bereits, dass jeder Buchstabe der Länge 1 die Ordnung 2 hat (Proposition 1). Ausserdem kann jedes Wort der Länge 2 aus  $\{b, c, d\}$  zu einem Buchstaben vereinfacht werden, hat also auch Ordnung 2 (Proposition 2). Wir betrachten also lediglich noch die Wörter (ab), (ba), (ac), (ca), (ad), (da). Zum Beweis benutzen wir Definition 5 und Proposition 3. Es gilt:

$$(ad)^4 = (adad)^2 = ((b, 1)(1, b))^2 = (b, b)^2 = (e, e) = e$$

$$(da)^4 = (dada)^2 = ((1, b)(b, 1))^2 = (b, b)^2 = (e, e) = e$$

$$(ac)^2 = (acac) = (d, a)(a, d) = (da, ad)$$

$$(ca)^2 = (caca) = (a, d)(d, a) = (ad, da)$$

$$(ab)^2 = (abab) = (c, a)(a, c) = (ca, ac)$$

$$(ba)^2 = (baba) = (a, c)(c, a) = (ac, ca)$$

Also haben (ab) und (ba) die Ordnung 4, (ac) und (ca) Ordnung 8 und (ad) und (da) Ordnung 16.  $\square$

**Proposition 6** Alle Wörter aus  $\{a, b\}$  haben eine Ordnung die 16 teilt.

**Beweis** Sei  $w$  ein reduziertes Wort aus  $\{a, b\}$ . Angenommen  $w$  hat ungerade Länge, dann startet und endet  $w$  mit dem selben Buchstaben, also  $w = uvu\dots uvu$  offensichtlich gilt dann,  $w^2 = (uvu\dots uvu)(uvu\dots uvu) = e$ , da  $a^2 = b^2 = 1$ , also hat  $w$  Ordnung 2.

Hat  $w$  nun gerade Länge  $k$ . Dann gilt  $w = x^{k/2}$ , mit  $x = ab$  oder  $x = ba$ . Dann gilt:

$$w^{16} = (x^{k/2})^{16} = (x^{16})^{k/2} = (e)^{k/2} = e$$

$x^{16} = e$  gilt nach Proposition 5.  $\square$

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammen die wir brauchen, um zu zeigen, dass die Grigorchuk Gruppe Torsion hat, also dass jedes Element endliche Ordnung hat. Tatsächlich ist die Grigorchuk Gruppe sogar eine 2-Gruppe.

**Satz 3** Jedes Element der Grigorchuk Gruppe hat Ordnung  $2^r$  für ein  $r \in \mathbb{N}_0$ .

**Beweis** Sei  $\gamma \in \Gamma$ ,  $k = l(\gamma)$  und  $w$  ein reduziertes Wort das  $\gamma$  repräsentiert. Wir zeigen die Behauptung mittels vollständiger Induktion über  $k$ .

Induktionsanfang:

$k = 0$  bedeutet  $\gamma = 1$ , also  $ord(\gamma) = 2^0$ .

$k = 1$  bedeutet  $\gamma^2 = 1$  nach Prop. 1, also  $ord(\gamma) = 2^1$ .

$k = 2$  gilt nach Prop. 5.

Induktionsvoraussetzung:

Alle Wörter der Länge kleiner als  $k$  haben Ordnung  $2^r$  für ein  $r \in \mathbb{N}_0$ .

Induktionsschritt:

Sei  $k \geq 3$ , wir unterscheiden ob  $k$  gerade oder ungerade ist.

Fall 1:  $k$  ist ungrade

Wenn der erste Buchstabe ein  $a$  ist, so ist es auch der letzte, also  $w = axa$  mit  $l(x) = k - 2$ .

Nach Induktionsvoraussetzung hat  $x$  die Ordnung  $2^M$  für ein  $M \in \mathbb{N}_0$ . Da Konjugation die Ordnung nicht verändert und  $a$  selbstinvers ist, hat auch  $w$  die Ordnung  $2^M$ .

Wenn der erste Buchstabe nicht  $a$  ist, so ist auch der letzte Buchstabe aus  $\{b, c, d\}$ , also  $w = u_x v$  mit  $u, v \in \{b, c, d\}$  und  $l(x) = k - 2$ . Betrachte nun  $uwu = u_x v u = x v u$ , da  $u, v \in \{b, c, d\}$  wird daraus ein Buchstabe (Prop. 2). Also hat  $uwu$  höchstens die Länge  $l(x) + 1 = k - 1$ . Also hat  $uwu$  die Ordnung  $2^M$  nach Induktionsvoraussetzung und damit hat auch  $w$  die Ordnung  $2^M$ .

Fall 2:  $k$  ist gerade

Indm wir  $\gamma$  durch  $b\gamma b$ ,  $c\gamma c$  oder  $d\gamma d$  ersetzen (Konjugation ändert Ordnung nicht), können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen  $w$  beginnt mit  $a$ , also  $w = au_1 a \dots au_l$  mit  $l = k/2$  und  $u_i \in \{b, c, d\}$  mit  $1 \leq i \leq l$ .

Fall 2a:  $l = 2m$  mit  $m \in \mathbb{N}$

Wir haben das  $a$   $l$ -mal in  $w$  enthalten, also ist  $\gamma \in St(1)$ , also können wir  $\psi(\gamma)$  nehmen.

$$\psi(\gamma) = \psi(au_1 a) \psi(u_2) \dots \psi(au_{2m-1} a) \psi(u_{2m}) = (\gamma_0, \gamma_1)$$

Für alle  $u_i$  gilt,  $\psi(au_i a) = v$  für ein  $v \in \{a, b, c, d, 1\}$ . Also trägt jeder Faktor des Produktes maximal einen Buchstaben zu den Worten die  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  repräsentieren bei. Nach Induktionsvoraussetzung muss gelten  $\gamma^{2^M} = 1$  und  $\gamma^{2^N} = 1$  für bestimmte  $M, N \in \mathbb{N}$ . Die Ordnung von  $\gamma$  teilt das kleinste gemeinsame Vielfache von  $2^M$  und  $2^N$  welches eine 2er-Potenz ist.

Fall 2b:  $l = 2m - 1$  mit  $m \in \mathbb{N}$

Also ist  $k = 4m - 2$ , dann folgt

$$\gamma^2 = ww = (au_1 a \dots u_{2m-2} a u_{2m-1}) (au_1 a \dots u_{2m-2} a u_{2m-1})$$

$$= (au_1a)u_2\dots u_{2m-2}(au_{2m-1}a)u_1\dots(au_{2m-2}a)u_{2m-1}$$

Dies sind genau  $2k = 8m - 4$  Faktoren, erneut gilt hier  $\gamma^2 \in St(1)$ , da die Anzahl der  $a$  erneut gerade sind. Wir können also erneut  $\psi$  anwenden.

$$\psi(\gamma^2) = \psi(au_1a)\psi(u_2)\dots\psi(au_{2m-2}a)\psi(u_{2m-1}) = (\alpha, \beta)$$

Nun ist offensichtlich  $l(\alpha) \leq 4m - 2$  und auch  $l(\beta) \leq 4m - 2$ . Wir betrachten nun drei Fälle, angenommen das Wort  $w$  enthält weder ein  $c$  noch ein  $d$ , dann gilt die Induktion nach Proposition 6.

Zweitens angenommen für einige  $j$  gilt  $u_j = d$ , dann ist  $\phi_1(au_ja) = 1$  und  $\phi_0(u_j) = 1$ . Daher werden  $\alpha$  und  $\beta$  repräsentiert von einem Wort mit maximaler Länge  $4m - 3 = k - 1$ , dafür gilt dann die Induktionsvoraussetzung, die Ordnung von  $\gamma$  muss das kleinste gemeinsame Vielfache von  $\alpha$  und  $\beta$  teilen, ist also selbst eine 2er-Potenz.

Im Dritten Fall gilt für einige  $j$ ,  $u_j = c$ , dann ist  $\phi_1(au_ja) = d$  und  $\phi_0(u_j) = d$ , also sind einige  $\alpha$  und  $\beta$  Wörter mit Länge  $4m - 2$  die  $d$  enthalten. Dies gilt dann nach Zweitens, haben dagegen beide eine kleinere Länge als  $4m - 2$ , dann gilt dies nach Induktionsvoraussetzung.  $\square$

Wir haben nun also gezeigt, dass die Grigorchuk Gruppe zwar endlich erzeugt ist, jedoch nicht endlich ist, außerdem ist sie eine 2-Gruppe. Im nächsten Vortrag werden wir dann noch sehen, dass die Gruppe amenable ist.