

# Das Theorem von Golod-Schafarevic

Seminar: Facetten der Geometrischen Gruppentheorie im  
Wintersemester 2017/18, Prof. Bogopolski

Kaya Ellen Henssen

19. Dezember 2017

## Inhaltsverzeichnis

1 Nilpotenz von assoziativen Algebren und Lie Algebren	2
2 Das Theorem von Golod-Schafarevic	4

# 1 Nilpotenz von assoziativen Algebren und Lie Algebren

**Definition 1.1** Sei  $k$  ein Körper und  $A$  ein Ring (ohne Annahme über Assoziativität oder Kommutativität der Multiplikation). Man nennt  $A$  eine  $k$ -Algebra, falls folgendes gilt:

- $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ ,
- $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ ,
- $1_k a = a$ ,
- $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ ,
- $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ , für alle  $\alpha, \beta \in k$  und  $a, b \in A$ .

$A$  heißt *assoziativ*, falls

$$(ab)c = a(bc), \text{ für alle } a, b, c \in A.$$

Man nennt  $A$  eine *Lie Algebra*, falls

$$ab + ba = 0 \text{ und } (ab)c + (bc)a + (ca)b = 0, \text{ für alle } a, b, c \in A.$$

**Definition/Bemerkung 1.2** Sei  $A$  eine assoziative  $k$ -Algebra und

$$(a, b) = ab - ba$$

der *Kommutator* von  $a, b \in A$ . Dann ist die Menge  $A$  zusammen mit der Addition, Skalarmultiplikation und dem Kommutator eine Lie Algebra. Diese nennt man, *die zu A assoziierte Lie Algebra*.

**Satz 1.3 (POINCARÉ-BIRKHOFF-WITT)** Sei  $L$  eine Lie Algebra. Dann existiert eine assoziative Algebra  $\hat{L}$  und ein Untervektorraum  $U \subset \hat{L}$ , so dass  $U$  abgeschlossen unter dem Kommutator ist, das heißt  $ab - ba \in U$  für alle  $a, b \in U$ . Außerdem ist die Lie Algebra  $U$  isomorph zu  $L$ . Man nennt  $\hat{L}$  die *einhiillende Algebra* der Lie Algebra  $L$ .

**Definition 1.4** Sei  $A$  eine  $k$ -Algebra.

- Ein Element  $a \in A$  heißt *nilpotent*, falls ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $a^n = 0$  gilt.
- $A$  heißt *nilpotent*, falls ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 0$ , für alle  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Ist  $n$  minimal mit dieser Eigenschaft, spricht man vom *Nilpotenzgrad* von  $A$ .

Was passiert nun mit der Eigenschaft Nilpotenz, wenn man von assoziativer Algebra zu Lie Algebra übergeht und andersrum?

Ist  $A$  eine assoziative Algebra, nilpotent vom Grad  $n$ , dann ist auch die zu ihr assoziierte Lie Algebra  $L$  nilpotent. Denn es gilt

$$(\cdots (a_1, a_2), a_3 \cdots) a_n = \sum a_{i_1} \cdots a_{i_n}.$$

Es handelt sich nach ausmultiplizieren also um eine Summe von Produkten mit jeweils  $n$  Faktoren. Da schon jedes Produkt der Länge  $n$  verschwindet, verschwindet die ganze Summe. Das heißt  $L$  ist auch nilpotent vom Grad  $\leq n$ .

Die andere Richtung hingegen ist nicht so klar.

**Satz 1.5** Sei  $A$  eine assoziative  $k$ -Algebra und  $L$  ein Untervektorraum abgeschlossen unter dem Kommutator. Falls nun  $L$  endlich erzeugt und nilpotent ist und außerdem jedes Element  $a \in L$  nilpotent im assoziativen Sinne ist, dann ist auch die einhüllende Algebra  $\hat{L}$  nilpotent.

**Beweis:** Seien  $e_1, \dots, e_s$  Erzeuger der Lie-Algebra  $L$ . Wir sagen nun,  $e_1, \dots, e_s$  sind *erzeugende Kommutatoren* mit *Gewicht 1*. Für das Gewicht definieren wir eine Funktion  $w : L \rightarrow \mathbb{N}$ . Induktiv definieren wir,  $w((e_i, e_j)) = 2$  und allgemein  $w((c, d)) = w(c) + w(d)$ . Sei  $n$  der Nilpotenzgrad von  $L$ , das heißt alle Kommutatoren  $c \in L$  mit  $w(c) \geq n$  verschwinden. Insgesamt gibt es also nur endlich viele erzeugende Kommutatoren ungleich 0, nennen wir sie  $c_1, \dots, c_r$ . Diese seien nach aufsteigendem Gewicht geordnet. Nach Voraussetzung existieren nun  $n_i \in \mathbb{N}$  mit  $c_i^{n_i} = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

Wir möchten nun zeigen, dass  $\hat{L}$  nilpotent, maximal von Grad  $N = n(n_1 + \dots + n_r)$  ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass jedes Produkt  $c_{i_1} \cdots c_{i_N}$  der Länge  $N$  verschwindet.

Für einen Ausdruck  $g = c_{i_1} \cdots c_{i_m}$  definieren wir noch folgendes:

- $m$  sei die *Länge* von  $g$ .
- Für das *Gewicht* gilt:  $w(c_{i_1} \cdots c_{i_m}) = w(c_{i_1}) + \dots + w(c_{i_m})$ .
- Eine *Umkehrung in der Reihenfolge* sei ein Ausschnitt  $c_i \cdots c_j$  mit  $i > j$ .
- Die *Charakteristik* von  $g$  ist das Paar  $(m, t)$ , wobei  $t$  die Anzahl der Umkehrungen sei.

Durch folgende Relation erhalten wir eine Wohlordnung auf der Menge der Charakteristiken:

$$(m, t) < (m', t'), \text{ falls } m < m' \text{ oder } m = m' \text{ und } t < t' \text{ gilt. } (\star)$$

Betrachten wir nun einen Ausdruck  $g := c_{i_1} \cdots c_{i_m}$  mit Gewicht  $w$ . Taucht eine Umkehrung in der Reihenfolge  $c_i c_j$ , mit  $i > j$  auf, ersetzen wir das Segment durch

$$c_j c_i + (c_i, c_j) = c_j c_i + c_i c_j - c_j c_i = c_i c_j.$$

So erhalten wir nach ausmultiplizieren die Summe von zwei Produkten mit gleichem Gewicht  $w$  und kleinerer Charakteristik. Im ersten Produkt haben wir die gleiche Summe einzelner Gewichte nur in einer anderen Reihenfolge, die Länge  $m$  bleibt gleich wir haben aber eine Umkehrung weniger. Also greift der zweite Fall von  $(\star)$  und die Charakteristik ist kleiner. Im zweiten Produkt haben wir die Länge  $m - 1$ , also ist die Charakteristik nach  $(\star)$  kleiner. Das Gewicht bleibt trotzdem gleich, da  $w((c_i, c_j)) = w(c_i) + w(c_j)$  gilt. Nach endlich vielen solcher Austauschungen erhalten wir eine Summe von Produkten

$$g = \sum_j g_j = \sum_j c_{j_1}^{k_1} \cdots c_{j_l}^{k_l} \text{ mit } j_1 < \dots < j_l \text{ und } k_\alpha \geq 1 \text{ f\u00fcr } \alpha \in \{1, \dots, l\} .$$

*Anmerkung:*  $(c_i, c_j) = c_\lambda$  f\u00fcr  $\lambda \in \{1, \dots, r\}$ , da es nur  $r$  viele erzeugende Kommutatoren gibt.

**Behauptung:** Falls  $w(g) \geq N$  ist, verschwindet jedes solche Produkt, da dann  $k_\alpha \geq n_{j_\alpha}$  f\u00fcr mindestens ein  $k_\alpha$  gilt.

**Beweis:** Angenommen  $k_\alpha < n_{j_\alpha}$  f\u00fcr alle  $k_\alpha$ . Dann gilt

$$w(g) = w(g_j) = \sum_{i=1}^l k_i \cdot w(c_{j_i}) < \sum_{i=1}^l n_{j_i} \cdot n \leq n \cdot \sum_{i=1}^r n_i = N$$

$w(g) < N$  ist ein Widerspruch zur Annahme  $w \geq N$ . Also ist  $k_\alpha \geq n_{j_\alpha}$  f\u00fcr mindestens ein  $k_\alpha$  und damit verschwindet jedes Produkt mit  $w(g) \geq m(g) \geq N$ .  $\square$

## 2 Das Theorem von Golod-Schafarevic

Ab jetzt sei  $A$  immer eine assoziative Algebra.

**Definition 2.1** Wir nennen  $A$  eine *Nilalgebra*, falls jedes  $a \in A$  nilpotent ist.

Eine zentrale Frage bei der Betrachtung von nilpotenten Algebren lautet, ob jede endlich erzeugte, assoziative Nilalgebra immer nilpotent ist. F\u00fcr endlichdimensionale Algebren ist dies korrekt, im Allgemeinen gilt diese Aussage jedoch nicht. Um das zu beweisen konstruierte Golod<sup>1</sup> f\u00fcr jeden K\u00f6rper  $k$  und jedes  $d \in \mathbb{N}_{>1}$  eine nicht-nilpotente  $k$ -Algebra mit  $d$  Erzeugern, in der jede  $(d-1)$ -erzeugte Unteralgebra nilpotent ist. Wir beginnen nun, diese Konstruktion zu beschreiben.

Sei  $k$  ein K\u00f6rper und  $F = k\{x_1, \dots, x_d\}$  der Polynomring \u00fcber  $k$ , in den nicht kommutierenden Variablen  $x_1, \dots, x_d$ . Betrachtet als Vektorraum, hat  $F$  die folgende Zerlegung in direkte Summen:

$$F = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \dots$$

wobei  $F_0 \cong k$  und  $F_n$  der von den  $d^n$  Monomen aufgespannte Unterraum ist. Also zum Beispiel:  $F_1 = \langle x_1, x_2, \dots, x_d \rangle$ . Die Polynome in  $F_n$  hei\u00dfen homogen vom Grad  $n$ , das hei\u00dft alle Monome haben den gleichen Totalgrad.

**Definition 2.2** Ein Ideal  $I \subset F$  hei\u00dft *homogen*, falls es von homogenen Polynomen erzeugt ist (diese k\u00f6nnen auch unterschiedlichen Grad haben).

**Lemma 2.3** Ein Ideal  $I \subset F$  ist homogen genau dann, wenn es alle homogenen Komponenten jedes seiner Elemente enth\u00e4lt.

**Beweis:** Sei  $I$  homogen und sei  $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ein Erzeugendensystem von  $I$ , wobei  $g_\lambda$  homogene Polynome vom Grad  $n_\lambda$  seien. Sei nun  $f \in I$ , das hei\u00dft  $f = \sum_{i=1}^m v_{\lambda_i} g_{\lambda_i} w_{\lambda_i}$ , wobei

<sup>1</sup>Evgeny Solomonovich Golod; \* 21. Oktober 1935, russischer Mathematiker.

$v_{\lambda_i}, w_{\lambda_i} \in F$ . Außerdem sei  $v_{\lambda_i} = \sum_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} v_{\lambda_i}^{(k)}$  und  $w_{\lambda_i} = \sum_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} w_{\lambda_i}^{(k)}$  die Zerlegung in homogene Komponenten. Nun multiplizieren wir  $f = \sum_{i=1}^m v_{\lambda_i} g_{\lambda_i} w_{\lambda_i}$  aus und erhalten nach eventuellem Umsortieren eine Zerlegung in homogene Komponenten von  $f$ . Da in jedem Monom ein Erzeuger  $g_{\lambda_i}$  erhalten bleibt und Ideale abgeschlossen bezüglich Addition sind, ist jede homogene Komponente von  $f$  wieder in  $I$  enthalten.

Sein nun  $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ein beliebiges Erzeugendensystem von  $I$ . Dann sind nach Voraussetzung alle homogenen Komponenten der Erzeuger  $g_\lambda$  wieder in  $I$  enthalten. Diese homogenen Komponenten bilden dann wieder ein Erzeugendensystem von  $I$ .  $\square$

**Lemma 2.4** Sei  $f_1, f_2, \dots \in F$  eine unendliche Folge von homogenen Polynomen vom Grad  $\geq 2$ , sortiert nach aufsteigendem Grad. Ferner sei die Anzahl  $r_n$  der Polynome vom Grad  $n$  endlich für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $I$  das von  $f_1, f_2, \dots$  erzeugte Ideal und wir setzen  $A = F/I$ .

Dann gilt:

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots, \quad \text{wobei } A_n = (F_n + I)/I.$$

**Beweis:** Angenommen es gilt

$$I = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} (I \cap F_n) \tag{1}$$

Da direkte Summen mit Quotienten vertauschen, und mit dem ersten Isomorphiesatz<sup>2</sup> folgt nun:

$$A = F/I \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} F_n / (I \cap F_n) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} (F_n + I) / I = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$$

Nun zeigen wir noch (1):

"  $\supset$  " Ist  $g \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} (I \cap F_n)$  folgt  $g = g_0 + g_1 + g_2 + \dots$ , wobei die  $g_n$  in  $I$  liegen für alle  $n \in \mathbb{N}$ , damit ist auch  $g \in I$ , da  $I$  als Ideal abgeschlossen unter Addition ist.

"  $\subset$  " Sei nun  $g \in I$ . Da  $I$  von homogenen Polynomen erzeugt ist, folgt mit **Lemma 2.3**, dass  $I$  die homogenen Komponenten  $g^{(k)}$  von  $g$  enthält, für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Also  $g^{(k)} \in (I \cap F_k)$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und damit  $g = g^{(0)} + g^{(1)} + \dots \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} (I \cap F_n)$ .  $\square$

Nun entwickeln wir ein Kriterium für die unendlich-Dimensionalität von  $F/I$ . Dazu betrachten wir zunächst die *formale Potenzreihe*

$$\sigma = 1 - dt + \sum_{n=2}^{\infty} s_n t^n,$$

wobei  $s_n \in \mathbb{Z}$  und  $s_0 = 1$  und  $s_1 = -d$  gilt. Die formalen Potenzreihen über  $\mathbb{Z}$  bilden einen Ring. Die Addition erfolgt komponentenweise und die Multiplikation ist definiert durch das Faltungsprodukt. Also  $\sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ , wobei  $c_n = \sum_{i=0}^n s_i y_{n-i}$  gilt. Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist die Reihe mit konstantem Term 1 und sonst nur Nullen. Außerdem sind die Einheiten gerade die Potenzreihen, mit konstantem Term 1 oder  $-1$ . Für  $\sigma$  gilt nun:

<sup>2</sup>Vgl. Siegfried Bosch, *Algebra*, Seite 19, Satz 8.

$\sigma^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$ , wobei  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = d$  und  $y_n = dy_{n-1} - \sum_{i=2}^n s_i y_{n-i}$  für  $n \geq 2$  gilt.

Dies kann man sich wie folgt verdeutlichen:

$$\sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{1 - (dt - \sum_{n=2}^{\infty} s_n t^n)} \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (dt - \sum_{n=2}^{\infty} s_n t^n)^i = \sum_{j=0}^{\infty} y_j t^j.$$

(\*) gilt wegen der geometrischen Reihe. Betrachtet man nun die ersten Summanden der Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} (dt - \sum_{n=2}^{\infty} s_n t^n)^i$  erhält man:

$$\begin{aligned} & 1 + dt - \sum_{n=2}^{\infty} s_n t^n + d^2 t^2 - 2dt \sum_{n=2}^{\infty} s_n t^n + (\sum_{n=2}^{\infty} s_n t^n)^2 + \dots \\ & = 1 + dt - \sum_{n=2}^{\infty} s_n t^n + d^2 t^2 - 2d \sum_{n=3}^{\infty} s_n t^n + \sum_{n=4}^{\infty} \hat{s}_n t^n + \dots \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich sieht man nun zum Beispiel  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = d$  und auch  $y_2 = d^2 - s^2$  was auch dem Ergebnis der Rekursionsformel für  $y_2$  entspricht.

**Theorem 2.5 (GOLOD-SCHAFAREVIC)** Sei  $F = k\{x_1, \dots, x_d\}$  der Polynomring über  $k$  in den nicht-kommutierenden Variablen  $x_1, \dots, x_d$ . Weiterhin sei  $I$  das Ideal aus **Lemma 2.4** und  $r_n$  die endliche Anzahl der homogenen Polynome vom Grad  $n$ , die  $I$  erzeugen. Die Koeffizienten  $s_n$  von  $\sigma$  seien nun so gewählt, dass  $y_n \geq 0$  für alle Koeffizienten von  $\sigma^{-1}$ . Wenn nun  $r_n \leq s_n$  gilt, dann ist die Algebra  $F/I$  unendlich-dimensional.

**Beweis:** (i) Wir setzen zunächst  $\dim((F_n + I)/I) = \dim(A_n) = a_n$ , wobei wir  $A_n$  als Vektorraum über  $k$  betrachten. Damit ist was wir zeigen möchten, also  $F/I$  ist unendlich-dimensional, äquivalent dazu dass

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

kein Polynom ist. Denn  $\alpha$  ist kein Polynom, wenn  $a_n \neq 0$ , für unendlich viele  $a_n$ . Wir definieren nun:

$$\rho = 1 - dt + \sum_{n=2}^{\infty} r_n t^n$$

und nehmen zunächst an wir wüssten, dass  $\rho^{-1}$  und  $\rho\alpha$  keine negativen Koeffizienten haben. Diese Aussagen werden wir dann in den Teilen (ii) und (iii) beweisen. Da  $\rho\rho^{-1} = 1$  ist, gilt folgendes:

$$\begin{aligned} & \rho^{-1}(1 - dt + \sum_{n=2}^{\infty} r_n t^n) = 1 \\ \Leftrightarrow & \rho^{-1}(1 + \sum_{n=2}^{\infty} r_n t^n) = 1 + \rho^{-1} dt. \end{aligned}$$

$(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine unendliche Folge von nicht negativen Werten und zusammen mit der Annahme, dass  $\rho^{-1}$  keine negativen Koeffizienten hat, folgt nun, dass  $\rho^{-1}$  kein Polynom sein kann. Da nun  $\alpha = \rho^{-1} \cdot \rho\alpha$  gilt, kann auch  $\alpha$  kein Polynom sein. Denn weder  $\rho^{-1}$  noch  $\rho\alpha$  haben negative Koeffizienten, die sich gegenseitig aufheben könnten.

(ii) Nun zeigen wir, dass  $\rho^{-1}$  keine negativen Koeffizienten hat. In dem Ring der formalen Potenzreihen über  $\mathbb{Z}$  sind die Einheiten gerade die Potenzreihen, mit konstantem Term 1 und  $-1$ . Das heißt  $\sigma^{-1}$  und  $\rho^{-1}$  existieren. Sei nun  $\delta = \sum_{n=2}^{\infty} (s_n - r_n) t^n$ , damit ergibt sich:

$$\rho = \sigma - \delta = \sigma(1 - \sigma^{-1}\delta).$$

Durch invertieren erhalten wir nun:

$$\rho^{-1} = \sigma^{-1}(1 - \sigma^{-1}\delta)^{-1} \stackrel{(*)}{=} \sigma^{-1}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma^{-1}\delta)^m\right) \quad (2)$$

(\*) belegen wir durch eine kurze Rechnung:

$$\begin{aligned} & (1 - \sigma^{-1}\delta)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma^{-1}\delta)^m\right) \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma^{-1}\delta)^m - \sigma^{-1}\delta - \sigma^{-1}\delta \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma^{-1}\delta)^m \\ &= 1 + \sum_{m=2}^{\infty} (\sigma^{-1}\delta)^m - \sum_{m=2}^{\infty} (\sigma^{-1}\delta)^m = 1 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind nun die Koeffizienten von  $\sigma^{-1}$  positiv und außerdem gilt nach Voraussetzung  $r_n \leq s_n$ , woraus folgt, dass auch  $\delta$  keine negativen Koeffizienten hat. Also sieht man nun mit Hilfe von (2), dass auch  $\rho^{-1}$  keine negativen Koeffizienten haben kann.

(iii) Zuletzt möchten wir nun noch beweisen, dass die Reihe  $\rho\alpha$  keine negativen Koeffizienten hat.

Es gilt:

$$\rho\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \text{ wobei } c_n = \sum_{i=0}^n r_i a_{n-i}.$$

Nun ist die Behauptung, dass  $c_n \geq 0$  ist, für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Für  $n \geq 2$  heißt das:

$$\sum_{i=0}^n r_i a_{n-i} \geq 0 \Leftrightarrow r_0 a_n + r_1 a_{n-1} + \sum_{i=2}^n r_i a_{n-i} \geq 0,$$

da  $r_0 = 1$  und  $r_1 = -d$  gilt. Wir erhalten also:

$$a_n \geq da_{n-1} - \sum_{i=2}^n r_i a_{n-i}. \quad (3)$$

Sei nun  $I_n$  die Menge aller homogenen Polynome vom Grad  $n$  in  $I$  und  $A_n^*$  ein direktes Komplement von dem Unterraum  $I_n$  in  $F_n$ , das heißt  $F_n = I_n \oplus A_n^*$ . Nun wissen wir, dass  $\dim(F_n) = d^n$  gilt, und  $\dim(A_n^*) = a_n$ , denn es ist  $A_n = (F_n + I)/I \cong F_n/(F_n \cap I)$  wobei  $F_n \cap I = I_n$ . Insgesamt also

$$\begin{aligned} d^n &= \dim(I_n) + a_n \\ \Leftrightarrow \dim(I_n) &= d^n - a_n. \end{aligned}$$

Sei weiterhin  $H_m$  der Unterraum, aufgespannt von den Polynomen von Grad  $m$ , unter den  $f_1, f_2, \dots$  und sei  $\langle XY \rangle$  der Unterraum erzeugt durch alle Elemente  $xy$ , wobei  $x \in X$  und  $y \in Y$  gilt. Hierbei sind  $X$  und  $Y$  beliebige Teilmengen von  $F$ . Wir werden zeigen, dass für  $n \geq 2$  gilt:

$$I_n \subset \langle I_{n-1}F_1 \rangle + \sum_{m=2}^n \langle A_{n-m}^* H_m \rangle. \quad (4)$$

Da nun  $\dim(I_n) = d^n - a_n$  und außerdem  $\dim(\langle XY \rangle) \leq \dim(X) \cdot \dim(Y)$ . Zusammen mit (4) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} d^n - a_n &\leq (d^{n-1} - a_{n-1})d + \sum_{m=2}^n a_{n-m}r_m \\ \Leftrightarrow a_n &\geq da_{n-1} - \sum_{m=2}^n a_{n-m}r_m, \end{aligned}$$

was wir zeigen wollten. Bleibt noch der Beweis von (4).

Sei dazu  $u \in I_n$ , das heißt  $u = \sum v_{\lambda_i} f_{\lambda_i} w_{\lambda_i}$  für homogene Polynome  $v_{\lambda_i}, w_{\lambda_i} \in F$ . Wir zeigen, dass  $vf_i w$  in der rechten Seite von (4) liegt, denn dann gilt das auch für die gesamte Summe.

**Fall 1:**  $\deg(w) = 1$ , dann ist  $u \in I_{n-1}F_1$ , da dann  $vf_i$  homogen vom Grad  $n - 1$  ist und  $w \in F_1$  liegt.

**Fall 2:**  $\deg(w) > 1$ , dann kann man  $w$  als Summe von Monomen darstellen  $w = w_1 + \dots + w_m$  für  $m \in \mathbb{N}$  und dann ist  $vf_i w = vf_i w_1 + \dots + vf_i w_m$ . Betrachtet man nun ein  $vf_i w_j$  kann man die letzte Variable von  $w_j$  abtrennen, da  $\deg(w_j) \geq 2$  gilt. Damit ist  $vf_i w_j = vf_i w'_j w''_j$  für  $w'_j$  homogen mit Grad  $\deg(w_j) - 1$  und  $w''_j \in F_1$ . Damit liegt jeder Summand in  $I_{n-1}F_1$  und damit auch die gesamte Summe.

**Fall 3:**  $\deg(w) = 0$ , dann können wir ohne Einschränkung  $u = vf_i$  betrachten. Sei  $\deg(f_i) = m$ , so dass  $f_i \in H_m$  liegt. Damit ist  $v \in F_{n-m} = I_{n-m} \oplus A_{n-m}^*$  schreibe also  $v = v' + v''$  wobei  $v' \in I_{n-m}$  und  $v'' \in A_{n-m}^*$  gilt. Also ist  $u = v'f_i + v''f_i \in \langle I_{n-m}H_m \rangle + \langle A_{n-m}^*H_m \rangle$ . Jetzt ist aber  $\langle I_{n-m}H_m \rangle \subset \langle I_{n-1}F_1 \rangle$  und damit  $u \in \langle I_{n-1}F_1 \rangle + \langle A_{n-m}^*H_m \rangle$  also liegt  $u$  in der rechten Seite von (4).  $\square$