Herrn Prof. Dr. Singhofs Beispiel einer Seifert-Mannigfaltigkeit

Carsten Feldkamp (carsten.feldkamp@hhu.de)

5. Mai 2017

1 Konstruktion des Beispiels und Bestimmung der Fundamentalgruppe

Seien $M_i \simeq S^1 \times D^2$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ vier Tori mit der S^1-Operation, welche durch $z \cdot (a, b) = (z^{\alpha_i} a, zb)$ gegeben ist. Für jeden Torus M_i betrachten wir einen S^1-Orbit auf ∂M_i und eine abgeschlossene Umgebung A_i dieses Orbits auf ∂M_i. Zudem setzen wir $B_i = \partial M_i \backslash A_i$ und verkleben die Tori durch $B_i \simeq A_{i+1}$ für $1 \leqslant i \leqslant 3$ sowie $B_4 \simeq A_1$, so dass die enstehende Mannigfaltigkeit orientierbar wird. Die dabei entstehende Mannigfaltigkeit nennen wir M.

Als nächstes betrachten wir für jeden Torus M_i die Abbildung

$$\varphi_i : M_i \backslash (S^1 \times \{0\}) \to M_i \backslash (S^1 \times \{0\}),$$

welche durch $\varphi_i(a, b) = (a^{\alpha_i} \frac{b}{\|b\|}, a \|b\|)$ gegeben ist. Ihre Umkehrfunktion ist dann durch $\varphi_i^{-1}(x, y) = (\frac{y}{\|y\|}, xy^{-\alpha_i} \left\|y^{1+\alpha_i}\right\|)$ gegeben. Diese Abbildung ist fasererhaltend, denn es gilt

$$z \cdot \varphi_i(a, b) = z \cdot (a^{\alpha_i} \frac{b}{\|b\|}, a \|b\|) = (z^{\alpha_i} a^{\alpha_i} \frac{b}{\|b\|}, za \|b\|) = \varphi_i(za, b).$$

Die Operation von S^1 auf dem Bild von φ_i ist also linear in der ersten und trivial in der zweiten Komponente. Daran sieht man, dass man jedes M_i mit Ausnahme der „exeptionellen“ Faser in der Mitte als triviales S^1-Bündel ansehen kann. Somit überführt φ_i den Außenbereich des ursprünglichen M_i in den eines trivialen Bündels.

Um die Fundamentalgruppe von M zu bestimmen, ist es einfacher, M auf leicht andere Art mithilfe der φ_i zu konstruieren. Dabei starten wir mit einem trivialen gefaserten Torus $S^1 \times D^2$ mit der S^1-Aktion $z \cdot (a, b) = (za, b)$ und entnehmen seinem Orbitraum zwei offene Kreisscheiben samt ihrer Fasern. Wir erhalten $X = (S^1 \times D^2) \backslash \{\mathring{T}_1, \mathring{T}_2\}$. In die „Löcher“ von X werden nun die mithilfe von φ_1, φ_2 im Randbereich trivialisierten

Tori M_1 und M_2 geklebt. Dazu verwenden wir das Seifert - van Kampen Theorem. Es gilt:

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X) & = & \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h], [q_2, h] \rangle \\ \pi_1(M_i) & = & \langle x_i \rangle \end{array}$$

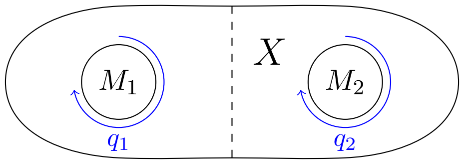

Abbildung 1: Der Orbitraum von X

Wir beginnen mit der Verklebung von M_1: Der Schnitt von M_1 mit X ist ein Torus $\pi_1(T) = \langle s, t \mid [s, t] \rangle$. Dabei sei s der polodiale Erzeuger und t der toroidale Erzeuger. Wir betrachten die Inklusion

$$\iota : T \to X$$

sowie die davon induzierte Abbildung:

$$\begin{array}{rcl} \iota_* : \pi_1(T) & \to & \pi_1(X) \\ s & \mapsto & q_1 \\ t & \mapsto & h \end{array}$$

Für die Abbildung von T in den Volltorus M_1 benutzen wir die Abbildung φ_1. Das Bild des Erzeugers s von $\pi_1(T)$ entspricht einer 1-fachen Umrundung in toroidaler Richtung (erste Komponente), also $s \to x_1$. Das Bild von t entspricht einer α_1-fachen Umrundung in torodialer verknüpft mit einer 1-fachen Umrundung in polodialer Richtung. Die Umrundung in polodialer Richtung ist jedoch nullhomotop in M_1, da M_1 ein Volltorus ist. Es folgt $t \to x_1^{\alpha_1}$. Als Abbildungskette aufgeschrieben bedeutet dies:

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{\varphi_{1|T}} & M_1 \backslash (S^1 \times \{0\}) & \to & M_1 \\ \pi_1(T) & \xrightarrow{(\varphi_{1|T})_*} & \pi_1(M_1 \backslash (S^1 \times \{0\})) = \langle x_1, \tilde{s} \mid [x_1, \tilde{s}] \rangle & \to & \pi_1(M_1) \\ s & \mapsto & x_1 & \mapsto & x_1 \\ t & \mapsto & x_1^{\alpha_1} \tilde{s} & \mapsto & x_1^{\alpha_1} \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir mit dem Seifert - van Kampen Theorem:

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X \cup M_1) & = & \langle q_1, q_2, h, x_1 \mid [q_1, h], [q_2, h], q_1 = x_1, h = x_1^{\alpha_1} \rangle \\ & = & \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h], [q_2, h], q_1^{\alpha_1} = h \rangle \end{array}$$

Auf analoge Weise ergibt sich:

$$\pi_1(X \cup M_1 \cup M_2) = \langle q_1, q_2, h \mid [q_1, h], [q_2, h], q_1^{\alpha_1} = h, q_2^{\alpha_2} = h \rangle$$

Dasselbe Verfahren können wir auch für M_3 und M_4 anwenden und erhalten:

$$\pi_1(X \cup M_3 \cup M_4) = \langle q_3, q_4, h' \mid [q_3, h'], [q_4, h'], q_3^{\alpha_3} = h', q_4^{\alpha_4} = h' \rangle$$

Nun schauen wir wieder auf die Konstruktion und sehen, dass wir die Ränder von $X \cup M_1 \cup M_2$ und $X' \cup M_3 \cup M_4$ miteinander verkleben müssen. In Abbildung 2 ist diese Verklebung durch Farben kenntlich gemacht.

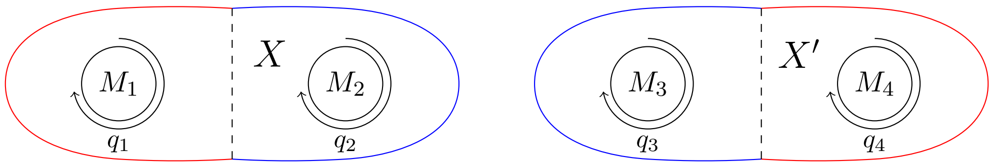

Abbildung 2: Verklebung von $X \cup M_1 \cup M_2$ und $X \cup M_3 \cup M_4$

Für diese Verklebung benutzen wir wieder das Seifert - van Kampen Theorem. Den polodialen Erzeuger der Fundamentalgruppe des Torus $\widetilde{T}$, über den verklebt wird, nennen wir a, den torodialen b. Für die von der Inklusion von $\widetilde{T}$ in X bzw. X' induzierte Abbildung ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{T}) & \to & \pi_1(X) \\ a & \mapsto & q_2^{-1}q_1^{-1} \\ b & \mapsto & h \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{T}) & \to & \pi_1(X') \\ a & \mapsto & q_3q_4 \\ b & \mapsto & h' \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \pi_1(M) &= \langle q_1, q_2, q_3, q_4, h, h' \mid [q_1, h], [q_2, h], [q_3, h'], [q_4, h'], \\ &\qquad q_1^{\alpha_1} = h, q_2^{\alpha_2} = h, q_3^{\alpha_3} = h', q_4^{\alpha_4} = h', h = h', q_2^{-1}q_1^{-1} = q_3q_4 \rangle \\ &= \langle q_i \ (1 \leqslant i \leqslant 4),\ h \mid [q_i, h],\ q_i^{\alpha_i} = h \ (1 \leqslant i \leqslant 4),\ q_1q_2q_3q_4 = 1 \rangle \end{aligned}$$

Somit entspricht M der Seifert-Mannigfaltigkeit mit den Invarianten (vgl. Peter Orlik, Seifert Manifolds, S. 88-90):

$$\{b; (\epsilon, g); (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)\} = \{0; (o_1, 0); (\alpha_1, 1), \dots, (\alpha_4, 1)\}$$

2 Die Invariante b

In diesem Abschnitt möchten wir das Beispiel aus Abschnitt 1 leicht verändern, um eine Seifert-Mannigfaltigkeit mit denselben Invarianten bis auf b zu erhalten. Die Invariante b soll nun beliebig in $\mathbb{Z}$ liegen.

Wir benutzen $X' \cup M_3 \cup M_4$ aus Abschnitt 1. Nur das X ändern wir, indem wir noch ein Loch mehr ausschneiden. In dieses Loch kleben wir den trivialen Torus $M_0 \simeq S^1 \times D^2$ mit der trivialen S^1-Operation $z \cdot (x, y) = (zx, y)$. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X) & = & \langle q_0, q_1, q_2, h \mid [q_i, h] \ (i \in \{0, 1, 2\} \rangle \\ \pi_1(M_0) & = & \langle x_0 \rangle \end{array}$$

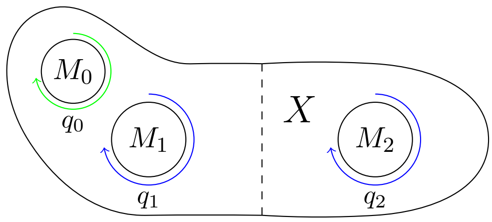

Abbildung 3: Der Orbitraum von X

Als Verklebungsabbildung wählen wir $\psi : S^1 \times D^2 \backslash \{0\} \to S^1 \times D^2 \backslash \{0\}$ mit $\psi(x, y) = ((\frac{y}{\|y\|})^{-b} x, y)$. Dann gilt $\psi^{-1}(v, w) = ((\frac{w}{\|w\|})^{b} v, w)$. Die Verklebung von M_1 und M_2 funktioniert wie in Abschnitt 1. Wir erhalten:

$$\pi_1(X \cup M_1 \cup M_2) = \langle q_0, q_1, q_2, h \mid [q_0, h], [q_1, h], [q_2, h], q_1^{\alpha_1} = h, q_2^{\alpha_2} = h \rangle$$

Nun müssen wir aber auch noch das zusätzliche Loch in X mit M_0 vekleben. Dazu nutzen wir wieder das Seifert - von Kampen Theorem. Der Schnitt von M_1 mit X ist ein Torus T. Den zugehörigen polodialen Erzeuger bezeichnen wir mit s, den toroidalen mit t. Die von der Inklusion $\iota : T \to X$ gegebene Abbildung $\iota_* : \pi_1(T) \to \pi_1(X)$ ist durch $\iota_*(s) = q_0$, $\iota_*(t) = h$ gegeben. Für die Abbildung in M_0 erhalten wir:

$$\begin{array}{ccccc} T & \xrightarrow{\psi_{|T}} & M_0 \backslash (S^1 \times \{0\}) & \to & M_0 \\ \pi_1(T) & \xrightarrow{(\psi_{|T})_*} & \pi_1(M_0 \backslash (S^1 \times \{0\})) = \langle x_0, \tilde{s} \mid [x_0, \tilde{s}] \rangle & \to & \pi_1(M_0) \\ s & \mapsto & x_0^{-b} \tilde{s} & \mapsto & x_0^{-b} \\ t & \mapsto & x_0 & \mapsto & x_0 \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir damit:

$$\begin{array}{c} \pi_1(X \cup M_0 \cup M_1 \cup M_2) \\ = \langle x_0, q_0, q_1, q_2, h \mid [q_0, h], [q_1, h], [q_2, h], q_1^{\alpha_1} = h, q_2^{\alpha_2} = h, \ h = x_0, \ q_0 = x_0^{-b} \rangle \\ = \langle q_0, q_1, q_2, h \mid [q_0, h], [q_1, h], [q_2, h], q_1^{\alpha_1} = h, q_2^{\alpha_2} = h, \ q_0 = h^{-b} \rangle \end{array}$$

Schließlich müssen wir nur noch $X \cup M_0 \cup M_1 \cup M_2$ und $X \cup M_3 \cup M_4$ miteinander verkleben. In Abbildung 4 ist diese Verklebung wieder farblich kenntlich gemacht.

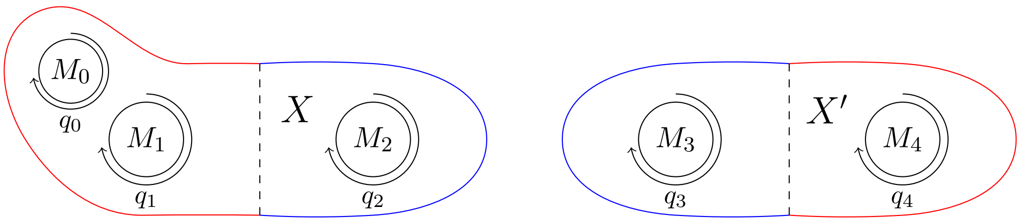

Abbildung 4: Verklebung von $X \cup M_0 \cup M_1 \cup M_2$ und $X \cup M_3 \cup M_4$

Auch der Schnitt dieser beiden Objekte ist ein Torus. Wir bezeichnen ihn mit $\widetilde{T}$. Der polodialen Erzeuger seiner Fundamentalgruppe sei a, der torodiale Erzeuger b. Für die von der Inklusion von $\widetilde{T}$ in X bzw. X' induzierte Abbildung ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{T}) & \to & \pi_1(X) \\ a & \mapsto & q_2^{-1}q_1^{-1}q_0^{-1} \\ b & \mapsto & h \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{T}) & \to & \pi_1(X') \\ a & \mapsto & q_3q_4 \\ b & \mapsto & h' \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \pi_1(M) &= \langle q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, h, h' \mid [q_0, h], [q_1, h], [q_2, h], [q_3, h'], [q_4, h'], \\ &\qquad q_0 = h^{-b}, q_1^{\alpha_1} = h, q_2^{\alpha_2} = h, q_3^{\alpha_3} = h', q_4^{\alpha_4} = h', h = h', q_2^{-1}q_1^{-1}q_0^{-1} = q_3q_4 \rangle \\ &= \langle q_i \ (0 \leqslant i \leqslant 4),\ h \mid\ q_0 = h^{-b},\ [q_i, h],\ q_i^{\alpha_i} = h \ (1 \leqslant i \leqslant 4),\ q_1q_2q_3q_4 = q_0^{-1} \rangle \\ &= \langle q_i \ (1 \leqslant i \leqslant 4),\ h \mid [q_i, h],\ q_i^{\alpha_i} = h \ (1 \leqslant i \leqslant 4),\ \ q_1q_2q_3q_4 = h^b \rangle \end{aligned}$$

Somit entspricht M der Seifert-Mannigfaltigkeit mit den Invarianten (vgl. Peter Orlik, Seifert Manifolds, S. 88-90):

$$\{b; (\epsilon, g); (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r)\} = \{b; (o_1, 0); (\alpha_1, 1), \ldots, (\alpha_4, 1)\}$$