Erinnerung: Für eine Bewertung $v: K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ und V 2-dim VR über K schreibe

$GL(V)^{\circ} = \ker(v \circ \det)$ und für $\epsilon: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$GL(V)^{+} = \ker(\epsilon \circ v \circ \det)$. Für Gitter $L_1, L_2 \subset V$ sei

$\chi(L_1, L_2) = \ell(L_1/L_3) - \ell(L_2/L_3)$ für $L_3 \subseteq L_1 \cap L_2$

Proposition 1: Für ein Gitter $L \subset V$ und $s \in GL(V)$ ist $\chi(L, sL) = v \circ \det(s)$.

Korollar: $d(\Lambda, s\Lambda) \equiv v(\det(s)) \mod 2$.

$GL(V)$ operiert durch $(s, [L]) = [sL]$ auf X $(s\lambda L = \lambda s L)$, aber mit Invertierung von Kanten: Sind $L' = \langle e_1, e_2\pi \rangle, L = \langle e_1, e_2 \rangle$

so ist mit $s \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrix bezüglich } (e_1, e_2)}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \in GL(V)$: $s([L]) = [\langle e_2\pi, e_1 \rangle] = [L']$

$s([L']) = [\langle e_2\pi, e_1\pi \rangle] = [\pi L] = [L]$

Nach dem Korollar kann dies für $s \in GL(V)^{+}$ nicht passieren.

Gäbe es $v \xrightarrow{e} w \overset{s}{\mapsto} w \xleftarrow{e} v$ $\Rightarrow$ nach Anwendung von s hat sich ein Knoten um eine Distanz von 1 verschoben, aber $v(\det(s)) \equiv 0 \mod 2$.

Stabilisatoren

Notation: Seien L, L' Gitter in V mit $L' \subset L$ und $\ell(L/L') = 1$ und Klassen Λ', Λ. Schreibe für eine Gruppe $G \leq GL(V)$: $G_L, G_{L'}, G_{LL'}, G_{\Lambda}, G_{\Lambda'}, G_{\Lambda\Lambda'}$ für die Stabilisatoren von L, L', dem Paar (L, L'), Λ, Λ' und dem Paar (Λ, Λ') in G.

Lemma 1: Für $G \leq GL(V)^\circ$ ist $G_L = G_\Lambda$. $G_L \leq G_\Lambda$ ist klar. Sei $s \in G_\Lambda$, also $s(\Lambda) = \Lambda \Rightarrow$ für $L \in \Lambda$ ist $s(L) = xL$ für $x \in K$. Offenbar ist $\chi(L, xL) = 2v(x)$. Da $\chi(L, xL) = v(\det(w \mapsto xw)) = v(x^2) = 2v(x)$. Wegen $s \in GL(V)^\circ$ ist $v(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{O}^\times \Rightarrow xL = L \Rightarrow s \in G_L$.

Bemerke, dass Lemma 1 insbesondere für $G = SL(V)$ anwendbar ist.

Definition: $G \leq GL(V)$ heißt beschränkt, wenn für eine Identifikation $GL(V) \cong GL_2(K)$ ein $d \in \mathbb{Z}$ existiert mit $v(s_{ij}) \leq d$ $\geq d$ $\forall\, s = (s_{ij}) \in GL(V)$.

Wie Konjugation mit Matrizen zeigt, macht es keinen Unterschied bzgl. welcher Basis $GL(V)$ mit $GL_2(K)$ identifiziert wird.

Proposition 2: Für $G \leq GL(V)^\circ$ sind äquivalent

i) G ist beschränkt
ii) $\exists\, \Lambda \in X: G \cdot X$ beschränkt
iii) $\exists\, L \leq V: G \cdot L = L$
iv) $\exists\, \Lambda \in X: GX = X$

Beweis: iii) $\Leftrightarrow$ iv) folgt aus Lemma 1.

ii) $\Leftrightarrow$ iv) folgt aus Theorem C. iii) $\Rightarrow$ i):

Es gäbe also $L \in \Lambda \in X$ mit $G \cdot L = L$. Sei dafür $L = \langle e_1, e_2 \rangle$ und betrachte die Identifikation $G \leq GL(V) \cong GL_2(K)$ bezüglich der Basis (e_1, e_2). Sei weiter $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. Angenommen $v(d) < 0$ und $v(d) < v(a), v(b), v(c)$

$$\Rightarrow A \cdot L = \langle a e_1 + c e_2 , b e_1 + d e_2 \rangle$$

$$\underset{(cd^{-1} \in \mathcal{O})}{=} \langle (a - bcd^{-1}) e_1 , b e_1 + d e_2 \rangle$$

$$\underset{v(\det(A)) = 0 \Rightarrow \det(A) = ad - bc = \varepsilon \in \mathcal{O}^\times}{=} \langle d^{-1} e_1 , b e_1 + d e_2 \rangle \neq L \text{, da } v(d) \neq 0.$$

Man hätte auch a, b oder c statt d wählen können

$$\Rightarrow \forall (a_{ij}) \in G : v(a_{ij}) \geq 0.$$

Bemerke andererseits, dass für diese Basis (e_1, e_2)

$$St_{GL(V)^\circ}(L) \cong St_{GL_2(K)^\circ}(\mathcal{O} e_1 \oplus \mathcal{O} e_2) = GL_2(\mathcal{O}) \subset GL_2(K)^\circ$$

da für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathcal{O}$ und $ad - bc = \varepsilon \in \mathcal{O}^\times$

$\Rightarrow AL \subset L$. Weiter gilt $\varepsilon e_1 = d(a e_1 + c e_2) - c(b e_1 + d e_2)$

und $\varepsilon e_2 = -b(a e_1 + c e_2) + a(b e_1 + d e_2)$

$\Rightarrow L = \langle \varepsilon e_1, \varepsilon e_2 \rangle \subset AL$. Also $\begin{pmatrix} 1 & \pi^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in St_{GL(V)^\circ}(L)\ \forall n \Rightarrow$ nach oben unbeschränkt!

! Also $G_L = G \cap GL_2(\mathcal{O})$.

Damit folgt auch i) $\Rightarrow$ iii): Falls G beschränkt ist, so gibt es eine Basis $B =: (e_1, e_2)$ von V, sodass $d \in \mathbb{Z}$ existiert mit $v((a_{ij})) \geq d \ \forall (a_{ij}) \in G$

$\Rightarrow \forall (a_{ij}) \in G$ ist $(a_{ij}) = \pi^d \cdot (\tilde{a}_{ij})$ mit $v(\tilde{a}_{ij}) \geq 0$

Für $L_0 = \langle e_1, e_2 \rangle$ ist also $(a_{ij}) L_0 = \pi^d (\tilde{a}_{ij}) L_0$

$\subset \pi^d L_0 \Rightarrow L := \sum_{s \in G} s(L_0) \leq \pi^d \cdot L_0 \Rightarrow L$ ist ein Gitter $\ell(\pi^d L_0 / L) < \infty$

und wird offenbar von G fixiert. ∎

Korollar: Die maximalen beschränkten Untergruppen ~~von~~ einer Gruppe $G \leq GL(V)^0$ sind gerade die ~~de~~ Stabilisatoren von Knoten in X.

Ist wieder $G \leq GL(V)^0$, und $\Lambda\Lambda'$ eine Kante von X, ~~so~~ mit $L \in \Lambda, L' \in \Lambda'$, $L' \subset L$ und $\ell(L/L') = 1$, so gilt nach Lemma 1 $G_{\Lambda\Lambda'} = G_L \cap G_{L'}$. $G_{\Lambda\Lambda'}$ ist also die Gruppe aller $s \in G_L$, deren Bild $\bar{s} : L/\pi L \to L/\pi L$ die Linie $L'/\pi L$ stabilisiert. (Fehler im Buch: L statt πL)

Matrixinterpretation: Sei (e_1, e_2) eine Basis von L, sodass $(e_1, \pi e_2)$ eine Basis von L' ist. Dann ist für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$

$AL = L' \Rightarrow G_{L'} = A G_L A^{-1}$ also $G_{\Lambda\Lambda'} = G_L \cap A G_L A^{-1}$.

Beispiel: Für $G = SL_2(K)$ ist

$$G_L \cap G_{L'} = SL_2(\mathcal{O}) \cap A\, SL_2(\mathcal{O}) A^{-1}$$

$A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \pi^{-1}b \\ c & \pi^{-1}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \pi^{-1}b \\ \pi c & d \end{pmatrix}$, also

$G_{\Lambda'} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O});\ c \equiv 0 \bmod (\pi) \right\}$.

Theorem 2: Sei $G \leq GL(V)^+$ mit $SL(V) \leq G$, so ist jedes Segment $\Lambda \bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet \Lambda'$ ein Fundamentalbereich für die Wirkung von G auf X.

Beweis: Sei X^+ (bzw. X^-) die Menge aller Ecken in X mit gerader Distanz zu Λ (bzw. Λ'). Wegen $G \leq GL(V)^+$ werden die beiden Mengen X^+ und X^- stabilisiert. Zeige, dass G transitiv auf X^+ (bzw. X^-) wirkt: Sei dafür $\Lambda_1 \in X^+$. (Fall X^- analog) $\Rightarrow d(\Lambda, \Lambda_1) = 2n \Rightarrow \exists$ Basis (e_1, e_2) von L, sodass $(e_1\pi^n, e_2\pi^{-n})$ eine Basis von $L_1 \in \Lambda_1$ ist.

Für $s = \begin{pmatrix} \pi^n & 0 \\ 0 & \pi^{-n} \end{pmatrix}$ (bezüglich (e_1, e_2)) gilt dann $sL = L_1$ wegen $s \in SL_2(V) \leq G \Rightarrow G \curvearrowright X^+$ transitiv.

Es bleibt noch zu zeigen, dass G transitiv auf allen Kanten e mit $o(e) = \Lambda$ operiert.

$\Leftrightarrow G$ operiert transitiv auf allen Untermoduln $L_1 \subset L \in \Lambda$ mit $\ell(L/L_1) = 1$. Seien dafür L_1, L_2 solche Untermoduln

$\Rightarrow \exists$ Basen $(e_1, e_2), (f_1, f_2)$ von L, sodass $(e_1, e_2\pi)$ bzw. $(f_1, f_2\pi)$ Basen von L_1 bzw. L_2 sind.

Sei $s \in GL(V)$ durch $(e_j) \mapsto (f_j)$ definiert. Dann ist $\epsilon := \det(s) \in \mathcal{O}^\times$, da $f_j \in L$ ist nämlich $v(\det(s)) \geq 0$ und mit $e_j \in \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{O}}$ folgt $v(\det(s^{-1})) \geq 0$.

$$\Rightarrow 0 = v(\det(id)) = v(\det(s s^{-1})) = v(\det(s)) + v(\det(s^{-1})).$$

~~Also~~ Sei nun $\tilde{s} = (e_1 \mapsto f_1, e_2 \mapsto \epsilon^{-1} f_2) \Rightarrow \det(\tilde{s}) = \epsilon \epsilon^{-1} = 1$

und $\tilde{s}(L_1) = \langle f_1, \epsilon^{-1} \pi f_2 \rangle = L_2$.

Theorem 3: Für $SL_2(V) \leq G \leq GL(V)^+$ ist $G = G_\Lambda *_{G_{\Lambda\Lambda'}} G_{\Lambda'}$.

Dies folgt sofort aus Theorem A.

Korollar (Ihara): $SL_2(K) = SL_2(\mathcal{O}) *_{\Gamma} SL_2(\mathcal{O})$ mit $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}) \mid c \equiv 0 \bmod \pi \right\}$, wobei die Einbettungen von Γ jeweils durch id und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b\pi \\ \pi^{-1} c & d \end{pmatrix}$ gegeben sind.

Beweis: Wegen $SL_2(K) \underset{\text{(Lemma 1)}}{\leq} GL(V)^0 \Rightarrow \mathrm{Stab}_{SL_2(K)}(\Lambda\Lambda')$ $\left(\Lambda \ni L = \langle e_1, e_2 \rangle,\ L' = \langle e_1, e_2\pi \rangle\right)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$

schon ausgerechnet

$$= \mathrm{Stab}_{SL_2(K)}(L) \cap \mathrm{Stab}_{SL_2(K)}(AL)$$

$$= \boxed{SL_2(\mathcal{O}) \cap A\, SL_2(\mathcal{O}) A^{-1} = \Gamma}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "B \mapsto A^{-1}BA"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & A\, SL_2(\mathcal{O}) A^{-1} \\
& SL_2(\mathcal{O}) \arrow[ur, "B \mapsto ABA^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^{-1} B A = A^{-1} \begin{pmatrix} a & \pi b \\ c & \pi d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \pi b \\ \pi^{-1} c & d \end{pmatrix}$$

Theorem 4: Sei $G \leq GL(V)^\circ$, sodass $\forall 1 \neq H \leq G$: H ist unbeschränkt
$\Rightarrow G$ ist frei.

Beweis: Nach Proposition 2.3) gibt es also kein Gitter L mit ($g \neq 1$ und) $g(L) = L$, so sonst $\langle g \rangle \leq G$ beschränkt wäre.
$\Rightarrow G$ operiert frei auf $X \Rightarrow G$ ist frei.

Beispiele: $SL_2(\mathbb{Q}_p) = SL_2(\mathbb{Z}_p) \underset{\mu}{*} SL_2(\mathbb{Z}_p)$

$SL_2(\mathbb{F}_p((t))) = SL_2(\mathbb{F}_p[[t]]) \underset{\mu}{*} SL_2(\mathbb{F}_p[[t]])$

Bemerkung: Um Theorem 3 anzuwenden, reicht es anzunehmen, dass $SL_2(V) \leq \overline{G}$ und $G \leq GL(V)^+$ ist. Damit erhält man
$SL_2(\mathbb{Z}[1/p]) = SL_2(\mathbb{Z}) *_{\Gamma_0(p)} SL_2(\mathbb{Z})$ mit
$\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \; ; \; c = 0 \bmod p \right\}$.