Def.) Graph im Sinne von Serre:

Ein Graph X besteht aus ~~aus Ecken~~ einer Menge von Knoten X^0 und einer Menge von Kanten X^1 zusammen mit 2 Abbildungen

$$X^1 \to X^0 \times X^0, \quad \cancel{y \mapsto (i(y), t(y))}$$
$$e \mapsto (o(e), t(e)) \quad \text{und}$$
$$X^1 \to X^1, \quad e \mapsto \bar{e}, \quad \text{sodass } e \neq \bar{e}, \ \bar{\bar{e}} = e, \ o(y) = t(\bar{y}).$$

Theorem A: Sei G eine Gruppe, X ein Graph und G operiere ohne Inversierung der Kanten auf X. Angenommen $T = \overset{P}{\circ} \xrightarrow{e} \overset{Q}{\circ} \subset X$ ist ein Fundamental-bereich von X mod G. ~~so sind für~~ Für die Stabilisatoren $G_P, G_Q, G_e = G_{\bar{e}}$ sind äquivalent:

1) X ist ein Baum

2) Der von den Inklusionen $G_P, G_Q \hookrightarrow G$ induzierte Homo. $\left(G_P \underset{G_y}{*} G_Q \to G\right)$ ist ein Iso.

Definition: Sei G eine Gruppe, die auf einem Graphen X operiert. Ein Fundamentalbereich für X mod G ist ein Teilgraph $T \subset X$, sodass $T \to G/X$ ein Isomorphismus ist.

Theorem A': Für $G = G_1 *_A G_2$ existiert ein, bis auf Isomorphie eindeutiger, Baum X auf dem G operiert, welcher einen Fundamentalbereich der Form $\overset{P}{\bullet} \xrightarrow{e} \overset{Q}{\bullet}$ enthält, sodass $G_P = G_1, G_Q = G_2, G_e = A$ gilt.

Theorem B: Es sei F ein endlicher freier Modul über einem Hauptidealring A und $M \subset F$ ein Untermodul vom Rang n. Dann existieren Elemente $x_1, \dots, x_n$ in F, die Teil einer Basis von F sind, sowie Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A - \{0\}$, sodass

i) $\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n$ eine Basis von M bilden.

ii) $\alpha_i | \alpha_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n$.

Dabei sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bis auf Assoziiertheit eindeutig ~~bestimmt~~ durch M bestimmt, unabhängig von der Wahl von $x_1, \dots, x_n$.

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ heißen dabei Elementarteiler von $M \subset F$.

Theorem C: Sei Γ eine Gruppe die auf einem Raum X operiert dann sind äquivalent:

a) Für jede beschränkte Teilmenge A von X^0 ist $\Gamma \cdot A$ beschränkt

b) $\exists P \in X^0$, sodass $\Gamma \cdot P$ beschränkt ist.

c) $\exists P \in X^0 : \Gamma \cdot P = P$.

Definition: Sei K ein Körper. Eine diskrete Bewertung für K ist eine Abbildung $v: K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, sodass $v: K^* \to \mathbb{Z}$ ein Epimorphismus ist mit $v(0) = \infty$, sodass $v(x+y) \geq \operatorname{Inf}(v(x), v(y))$ $\forall x, y \in K$. Es bezeichne $\mathcal{O}$ den Bewertungsring von K, d.h. die Menge aller $x \in K$ mit $v(x) \geq 0$. Wählt man nun ein Element $\pi \in K$ mit $v(\pi) = 1$, so gilt für $x \in K^*$: $x\mathcal{O} = \pi^{v(x)}\mathcal{O} = \{y \in K;\ v(y) \geq v(x)\}$. (*)

Man sieht hier, dass $\mathcal{O}$ ein HIR ist.

Konstruktion: Sei V ein 2-dimensionaler Vektorraum über K. Ein Gitter L in V sei ein endlich-dimensionaler $\mathcal{O}$-Untermodul von V, welcher V erzeugt. Dann ist automatisch L frei vom Rang 2.

Sei dafür $\langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathcal{O}} = L$ für $e_j \in V$ und wähle e_i, e_k mit $\langle e_i, e_k \rangle_K = V$. Damit gibt es $\lambda, \mu \in K$ mit $e_j = \lambda e_i + \mu e_k$. Falls $v(\lambda), v(\mu) \geq 0 \Rightarrow \lambda, \mu \in \mathcal{O}$, also $e_j \in \langle e_1, \dots, \hat{e_j}, \dots, e_n \rangle_{\mathcal{O}}$. Sonst ist obdA $0 > v(\lambda)$ und $v(\mu) \geq v(\lambda) \Rightarrow v(\lambda^{-1}) > 0$, $v(\frac{\mu}{\lambda}) \geq 0$, also $\lambda^{-1}, \frac{\mu}{\lambda} \in \mathcal{O}$ und damit $\lambda^{-1} e_j - \frac{\mu}{\lambda} e_k = e_i \in \langle e_j, e_k \rangle_{\mathcal{O}}$. In beiden Fällen kann auf einen Erzeuger verzichtet werden.

K^* operiert durch $L \mapsto Lx$ auf der Menge der Gitter. Schreibe X für die Orbiten bezüglich dieser Operation.

Sind L, L' zwei Gitter in V, so gibt es nach Theorem B eine Basis (e_1, e_2) von L, sodass $(e_1\pi^a, e_2\pi^b)$ eine Basis von L' ist, wobei die Menge $\{a, b\}$ nicht von der Basis von L abhängt.

Man bemerke hierfür, dass $\pi^n L' \subset L$ ist für n groß genug, und dass $\mathcal{O}$ ein Hauptideal ist. (Betrachte (*)).

~~Für $L' \subset L$ hat man hier $L/L' \cong \mathcal{O}/\pi^a\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}/\pi^b\mathcal{O}$.~~

$|a-b|$ hängt hierbei nur von den Klassen der Gitter ab:

Für xL, yL' statt L, L' hätten wir Basen (xe_1, xe_2) von L bzw. $(ye_1\pi^a, ye_2\pi^b) = (\frac{y}{x} xe_1\pi^a, \frac{y}{x} xe_2\pi^b)$ von L'. Nun ist $\frac{y}{x} = \varepsilon \pi^{v(\frac{y}{x})}$ mit $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$.

$\Rightarrow (\pi^{a+v(\frac{y}{x})} xe_1, \pi^{b+v(\frac{y}{x})} xe_2)$ ist Basis von L'.

Für Klassen $\Lambda, \Lambda' \in X$ kann daher eine Distanz $d(\Lambda, \Lambda') = |b-a|$ definiert werden. Nun kann X als Graph angesehen werden, indem $\Lambda, \Lambda' \in X$ adjazent sind, falls $d(\Lambda, \Lambda') = 1$ ist.

Theorem 1: Der so entstandene Graph X ist ein Baum

Beweis: Zunächst ist X zusammenhängend. Seien dafür Λ, Λ' zwei Knoten in X. Seien $L \in \Lambda$, $L' \in \Lambda'$ mit Basen (e_1, e_2) bzw. $(\pi^a e_1, \pi^b e_2)$. $\Rightarrow \hat{L} := \langle e_1, \pi^{b-a} \cdot e_2 \rangle_{\mathcal{O}} \in \Lambda'$

OBdA sei $b - a \geq 0$. Seien $L_j := \langle e_1, e_2\pi^j \rangle_{\mathcal{O}}$. Dann gilt

für $\Lambda_j = [L_j]$ offenbar $\Lambda_0 = \Lambda$, $\Lambda_{b-a} = \Lambda'$ und $d(\Lambda_j, \Lambda_{j+1}) = 1$.
Um zu sehen, dass X ein Baum ist, wähle man einen Pfad $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ mit $\Lambda_j \neq \Lambda_{j+2}$ und $d(\Lambda_j, \Lambda_{j+1}) = 1$ und zeige $\Lambda_0 \neq \Lambda_n$. Zeige dafür per Induktion $d(\Lambda_0, \Lambda_n) = n$.

Wähle $L_0 \in \Lambda_0$ beliebig. Dann gibt es offenbar ein eindeutiges Modul $L_1 \in \Lambda_1$ mit $L_1 \subsetneq L_0$ und $L_1 \not\subseteq L_0\pi$. Ebenso gibt es $L_2 \in \Lambda_2$ mit $L_2 \subsetneq L_1$, $L_2 \not\subseteq L_1\pi$. Man erhält also eine Kette $L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq \dots \supsetneq L_n$ mit $L_j \in \Lambda_j$. Um $\Lambda_0 \neq \Lambda_n$ zu zeigen, reicht es $L_n \not\subseteq L_0\pi$ zu zeigen:
Für Basis (e_1, e_2) von L_0 mit $(e_1\pi^a, e_2\pi^b)$ Basis von L_n ist also $a > 0, b \geq 0$ oder $a \geq 0, b > 0$. OBdA $a > 0$, da $L_n \subsetneq L_0$. Aus $L_n \not\subseteq L_0\pi$
$\Rightarrow a \leq 0$ oder $b \leq 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow d(\Lambda_0, \Lambda_n) = |a| \neq 0$.
Die Induktionsannahme gibt uns $L_{n-1} \not\subseteq L_0\pi$. (**)
Man bemerke nun $L_n, L_{n-2}\pi \subsetneq L_{n-1} \Rightarrow \exists$ Basen $(e_1, e_2), (f_1, f_2)$ von L_{n-1}, sodass $(e_1\pi, e_2)$ Basis von L_n ist und $(f_1\pi, f_2)$ Basis von $L_{n-2}\pi$ ist. Mit $p: L_{n-1} \to L_{n-1}/\pi L_{n-1} = \langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle = \langle \overline{f_1}, \overline{f_2} \rangle$
$\cong \mathcal{O}/\pi\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}/\pi\mathcal{O} = k^2$ mit dem Körper $k := \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$. ($\pi\mathcal{O}$ ist offenbar ein maximales Ideal in $\mathcal{O}$). Nun sind $L_n = p^{-1}(\langle \overline{e_2} \rangle)$ und $L_{n-2}\pi = p^{-1}(\langle \overline{f_2} \rangle)$ die Urbilder 1-dim. UVR vom VR $L_{n-1}/\pi L_{n-1}$.
Wäre $L_{n-2}\pi = L_n$, so wäre $\Lambda_{n-2} = \Lambda_n$. Damit kann $L_{n-1} = L_{n-2}\pi + L_n$ angenommen werden.

Wegen $L_{n-2}\pi \subset L_0\pi$ folgt $L_{n-1} \equiv L_n \mod L_0\pi$ und die Induktionsvoraussetzung impliziert $L_n \not\subset L_0\pi$. $\blacksquare$

Sei $\hat{K}$ die Vervollständigung von K bezüglich v, genauer: bezüglich der durch die Norm $|x|_v = \left(\frac{1}{2}\right)^{v(x)}$ induzierten Metrik. Setzt man die Bewertung v auf kanonische Weise auf $\hat{K}$ fort, so sieht man leicht, dass $\hat{\mathcal{O}} = \varprojlim \mathcal{O}/\mathcal{O}\pi^n$ der Bewertungsring zu $\hat{K}$ ist. Für $\hat{V} := V \otimes_K \hat{K}$ ist die Zuordnung $L \mapsto L \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}$ eine Bijektion zwischen den Gittern in V und $\hat{V}$, und induziert einen Isomorphismus zwischen den Bäumen zu K und $\hat{K}$.

Projektive Linien

Fixiert man $n \in \mathbb{N}$, einen Knoten $\Lambda_0 \in X$ und $L_0 \in \Lambda_0$, so gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen den Knoten $\Lambda \in X$ mit $d(\Lambda_0, \Lambda) = n$ und den direkten Faktoren in $L_0/L_0\pi^n$ vom Rang 1.

Man betrachte hierfür die Projektion $p: L_0 \to L_0/L_0\pi^n$.

Zunächst gibt es für $\Lambda \in X$ mit $d(\Lambda_0, \Lambda) = n$ genau ein $L \in \Lambda$ mit $L \subset L_0$ und $L_0/L \cong \mathcal{O}/\mathcal{O}\pi^n$. Es reicht also eine Bijektion

$$A := \left\{ \begin{array}{l} L \subset L_0 \text{ Untermodul mit} \\ L_0/L \cong \mathcal{O}/\mathcal{O}\pi^n \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{l} \text{Direkte Faktoren} \\ U \subset L_0/L_0\pi^n \text{ vom Rang } 1 \end{array} \right\} =: B$$

anzugeben. Offenbar ist $A = \left\{ \begin{array}{l} L \subset L_0 \text{ Untermodul} : \exists \text{ Basis} \\ (e_1, e_2) \text{ von } L_0, \text{ sodass } (e_1, e_2\pi^n) \\ \text{Basis von } L \text{ ist.} \end{array} \right\}$

Und man sieht, dass $A \to B$, $L \mapsto p(L) = L/L_0\pi^n$ wohldefiniert ist. Angenommen für $U \in B$ wäre $p^{-1}(U) \in A$. Dann wäre zum einen $p(p^{-1}(U)) = U$ und $p^{-1}(p(L)) = p^{-1}(L/L_0\pi^n) = L + L_0\pi^n = L$ für $L \in A$, da $L_0\pi^n \subset L$. Damit gäbe es die geforderte Bijektion.

Sei also $U \in B$ und $L := \bar{p}^{-1}(U)$. Dann ist $L_0\pi^n = \bar{p}^{-1}(\bar{0}) \subset p^{-1}(U) = L \subset L_0$. Es gibt also eine Basis (e_1, e_2) von L_0, sodass $(e_1\pi^a, e_2\pi^b)$ mit $0 \leq a, b \leq n$ eine Basis von L ist. Es ist $(a,b) \in \{(0,n),(n,0)\}$ zu zeigen. Da nun $U = p(\bar{p}^{-1}(U)) = p(\langle e_1\pi^a, e_2\pi^b\rangle) = \frac{\langle e_1\pi^a, e_2\pi^b\rangle}{\langle e_1\pi^n, e_2\pi^n\rangle}$ ein direkter Faktor ist, gibt es $V \leq L_0/L_0\pi^n$ mit $U \oplus V = L_0/L_0\pi^n$. D.h. $\forall\, x \in L_0/L_0\pi^n$ gibt es eindeutige $u \in U$, $v \in V$ mit $u + v = x$. Angenommen $b > 0$. Schreibe $\overline{e_2} = u + v \Rightarrow \pi^b\overline{e_2} = \pi^b u + \pi^b v$. Da $\pi^b \overline{e_2} \in L/L_0\pi^n$ ist ~~\#\#\#~~ $\Rightarrow \pi^b v = 0$, $\pi^b u = \pi^b \overline{e_2}$. Sei $\tilde{u} \in L$ mit $p(\tilde{u}) = u \Rightarrow \overline{\pi^b(\tilde{u} - e_2)} = \bar{0}$, also $\pi^b(\tilde{u} - e_2) \in \pi^n L_0$

$\Rightarrow \tilde{u} - e_2 \in \pi^{n-b} L_0 \Rightarrow e_2 \in \pi^{n-b} L_0 + L$

$= \langle e_1\pi^{n-b}, e_2\pi^{n-b}\rangle + \langle e_1\pi^a, e_2\pi^b\rangle = \langle e_1\pi^{\min(a,n-b)}, e_2\pi^{\min(b,n-b)}\rangle$

$\Rightarrow \min(b, n-b) = 0 \Rightarrow b = n$, da $b > 0$. Ebenso folgt auch $a \in \{0, n\}$. Für $a = b = n \Rightarrow \mathrm{rg}(L/L_0\pi^n) = 0$ und für $a = b = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(L/L_0\pi^n) = 2$. $\Rightarrow (a,b) \in \{(0,n),(n,0)\} \Rightarrow L \in A$. ■

Ein unendlich langer Pfad (mit Startpunkt Λ_0!) ohne Backtracking wird ein Ende von X genannt. Die Enden von X entsprechen mittels obiger Bijektion den Punkten aus $\varprojlim P(L_0/L_0\pi^n)$.

$P(L_0/L_0\pi^n)$ ist hier die Menge der direkten Faktoren vom Rang 1 von $L_0/L_0\pi^n$. Der inverse Limes wird bezüglich des Systems $P(L_0/L_0\pi^j) \xrightarrow{Pr_{ij}} P(L_0/L_0\pi^i)$; $i \leq j$ gebildet, wobei Pr_{ij} von der kanonischen Projektion $L_0/L_0\pi^j \to L_0/L_0\pi^i$ induziert wird. Zunächst wird einem Punkt $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \varprojlim P(L_0/L_0\pi^j)$ der Pfad $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ zugeordnet, wobei Λ_j nach obiger Bijektion x_j entspricht. Es ist $d(\Lambda_j, \Lambda_{j+1}) = 1$ und $d(\Lambda_j, \Lambda_{j+2}) = 2$ zu zeigen.

$d(\Lambda_j, \Lambda_{j+2}) = 2$ folgt aus $d(\Lambda_j, \Lambda_{j+1}) = 1$, da nach obigen Bijektion ($x_j \leftrightarrow \Lambda_j \ni L_j$) $d(\Lambda_0, \Lambda_j) = j$ ist $\forall j$.

~~Nach Konstruktion ist $L_j \subset L_0, L_{j+1} \subset L_0, L_0$~~

Seien (e_1, e_2), (f_1, f_2) Basen von L_0, sodass $(e_1, e_2\pi^j)$ bzw. $(f_1, f_2\pi^{j+1})$ Basen von L_j bzw. L_{j+1} sind.

Mit $Pr_{j,j+1}(x_{j+1}) = x_j \Leftrightarrow L_{j+1}/L_0\pi^j = L_j/L_0\pi^j$ folgt

$L_{j+1} + L_0\pi^j = L_j + L_0\pi^j = L_j$. Also $L_j = \langle f_1, f_2\pi^{j+1}\rangle + \langle e_1\pi^j, e_2\pi^j\rangle$

$= \langle f_1\rangle + \pi^j\langle f_2\pi, e_1, e_2\rangle = \langle f_1\rangle + \pi^j\langle e_1, e_2\rangle = \langle f_1\rangle + \pi^j L_0$

$= \langle f_1\rangle + \pi^j\langle f_1, f_2\rangle = \langle f_1, \pi^j f_2\rangle \Rightarrow d(\Lambda_j, \Lambda_{j+1}) = 1$.

Ist andererseits ein Pfad $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots$ vorgegeben mit $L_j \in \Lambda_j$, sodass $L_0/L_j \cong \mathcal{O}/\pi^j\mathcal{O}$ gilt, so ist $Pr_{j,j+1}(x_{j+1}) = x_j$ bzw. $L_{j+1} + L_0\pi^j = L_j$ zu zeigen. Seien dazu wieder (e_1, e_2), (f_1, f_2) Basen von L_0, sodass $(e_1, e_2\pi^j)$ bzw. $(f_1, f_2\pi^{j+1})$ Basen von L_j bzw. L_{j+1} sind. Wegen $d(\Lambda_j, \Lambda_{j+1}) = 1$ gibt es eine Basis (h_1, h_2) von L_j, sodass $(h_1\pi^a, h_2\pi^b)$ eine Basis von L_{j+1} ist, mit $|a-b| = 1$. Wäre also $a < 0$, dann hätte man $L_0\pi^j \subset L_j \subset L_{j+1}$, also $\langle f_1, f_2\pi^j\rangle \subset \langle f_1, f_2\pi^{j+1}\rangle$ ↯.

Wäre $a > 1$, dann wäre $L_{j+1} \subset \pi L_j$ und somit $f_1 = \alpha\pi e_1 + \beta e_2\pi^{n+1}$ für passende $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$. $\Rightarrow \pi^{-1} f_1 \in L_j \subset L_0 = \langle f_1, f_2\rangle$ ↯

Für $a = 0$ kann $b = -1$ ausgeschlossen werden, da hierfür wieder $L_j \subset L_{j+1}$ folgt. Für $a = 1$, $b = 2$ wäre erneut $L_{j+1} \subset \pi L_j$, sodass für das Tupel (a, b) nur die Möglichkeiten $(0,1)$ und $(1,0)$ bleiben.

$\Rightarrow L_j/L_{j+1} \cong \mathcal{O}/\mathcal{O}\pi$ ist ein Körper und die Inklusion $L_{j+1} \subsetneq L_j$ ist nicht verfeinerbar. Andererseits ist $\pi^j L_0 \not\subset L_{j+1}$ und $\pi^j L_0 \subset L_j \Rightarrow L_{j+1} \subsetneq \pi^j L_0 + L_{j+1} \subset L_j$
$\Rightarrow \pi^j L_0 + L_{j+1} = L_j$.

Def: Betrachte nun die surjektive Verkettung

$$GL(V) \xrightarrow{\det} K \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

und definiere $GL(V)^0 = \ker(v \circ \det)$, sowie $GL(V)^+ = \ker(\varepsilon \circ v \circ \det)$. Dann ist $SL(V) \subset GL(V)^0 \subset GL(V)^+ \subset GL(V)$

Es wird nun $v(\det(s))$ in Termen von Giltern charakterisiert

Def/Satz: Sind L_1, L_2 Gitter, $L_3 \subset L_1 \cap L_2$ ein Untermodul, so ist $\chi(L_1, L_2) = \ell(L_1/L_3) - \ell(L_2/L_3)$ unabhängig von der Wahl von L_3. Hier bezeichnet ℓ die Länge eines Moduls, d.h. $\ell(M) = \max\{n \mid \exists M_j \le M : M_0 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M\}$.

Beweis: Zunächst gilt allgemein für Moduln $K \le L \le M$ $\ell(M/K) = \ell(M/L) + \ell(L/K)$: Seien dafür

$$K = T_0 \subsetneq \dots \subsetneq T_{\ell(L/K)} = L \quad \text{und} \quad L = T_{\ell(L/K)} \subsetneq \dots \subsetneq T_{\ell(L/K)+\ell(M/L)} = M$$

nicht verfeinerbare Ketten. Dann ist die Kette

$$K = T_0 \subsetneq \dots \subsetneq T_{\ell(L/K)+\ell(M/L)} = M$$

eine nicht verfeinerbare Kette und die Aussage folgt aus dem Jordan-Hölder-Theorem für Moduln. Um dies auf obige Sequenz anzuwenden sei $L_4 \subset L_1 \cap L_2$ und $L_5 = L_3 \cap L_4$. Man hat also

$$\begin{tikzcd} & L_3 \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & L_1 \\ L_5 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \\ & L_4 \arrow[r, hook] \arrow[uur, hook] & L_2 \end{tikzcd}$$

und mit obiger Formel folgt

$$\begin{aligned}
\ell(L_1/L_3) - \ell(L_2/L_3) &= \left(\ell(L_1/L_5) - \ell(L_3/L_5)\right) - \left(\ell(L_2/L_5) - \ell(L_3/L_5)\right) \\
&= \ell(L_1/L_5) - \ell(L_2/L_5) \\
&= \left(\ell(L_1/L_5) - \ell(L_4/L_5)\right) - \left(\ell(L_2/L_5) - \ell(L_4/L_5)\right) \\
&= \ell(L_1/L_4) - \ell(L_2/L_4) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposition 1: Sei L ein Gitter der Klasse Λ und $s \in GL(V)$.
Man hat $\chi(L, sL) = v(\det(s))$.

Beweis: Sei (e_1, e_2) eine Basis von L, sodass $(e_1\pi^a, e_2\pi^b)$ eine Basis von sL ist. Dann ist $s \,\hat{=}\, A \cdot \begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^b \end{pmatrix}$ mit $A \in GL_2(\mathcal{O})$. $\left((e_1, e_2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^b \end{pmatrix}} (e_1\pi^a, e_2\pi^b) \xrightarrow{A} (s(e_1), s(e_2)) \right)$

Basen vom gleichen $\mathcal{O}$-Modul

Also $v(\det(s)) = v(\pi^a \cdot \pi^b \cdot \varepsilon) = a + b$, da $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ liegen muss wegen $A \in GL_2(\mathcal{O})$. Andererseits ist $\chi(L, sL) = \ell\left(\frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{\langle e_1\pi^{\max(0,a)}, e_2\pi^{\max(0,b)} \rangle}\right) - \ell\left(\frac{\langle e_1\pi^a, e_2\pi^b \rangle}{\langle e_1\pi^{\max(0,-a)}, e_2\pi^{\max(0,-b)} \rangle}\right)$
$= \max(0,a) + \max(0,b) - \max(0,-a) - \max(0,-b) = a + b$.

Korollar: $d(\Lambda, s\Lambda) = v(\det(s)) \pmod 2$

Beweis: $d(\Lambda, s\Lambda) = |a - b| \equiv a + b \equiv v(\det(s)) \bmod 2$.