

Fuchssche Gruppen Übungsblatt 0

Bei der Berechnung von unbestimmten Integralen dürfen Sie Google benutzen.

Aufgabe 1. Beweisen Sie das Lemma 1.2.6 aus der Vorlesung:

- a) Sei I_r der euklidische Strahl in \mathbb{H} , der im Punkt der reellen Achse mit der x -Koordinate r startet und senkrecht zur Achse läuft. Geben Sie eine Transformation aus $\text{Möb}(\mathbb{R})$, die I_r auf I_0 abbildet. [2 P.]
- b) Sei K_{r_1, r_2} der euklidische Halbkreis in \mathbb{H} , der die Endpunkte auf der reellen Achse hat und die x -Koordinaten dieser Punkte r_1 und r_2 sind ($r_1 < r_2$). Geben Sie eine Transformation aus $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$, die $K(r_1, r_2)$ auf I_0 abbildet. [5 P.]

Aufgabe 2.

- a) Berechnen Sie die hyperbolische Länge der euklidischen Strecke von $1 + i$ bis $3 + 3i$. [3 P.]
- b) Berechnen Sie den hyperbolischen Abstand $\rho(1 + i, 3 + 3i)$ zwischen $1 + i$ und $3 + 3i$. [3 P.]

Vergleichen Sie die Zahlen in a) und b) mit Hilfe eines Rechners.

Aufgabe 3.

- a) Sei K der euklidische Kreis mit Zentrum $(3 + 2i)$ und Radius 1. Berechnen Sie die hyperbolische Länge von K . [6 P.]
- b) Sei A der hyperbolische Kreis in \mathbb{H} mit Zentrum $a + ib$ und hyperbolischem Radius r . Sei B der euklidische Kreis in \mathbb{H} mit Zentrum $a + ib \operatorname{ch}(r)$ und euklidischem Radius $b\sqrt{\operatorname{ch}^2(r) - 1}$. Beweisen Sie, dass $A = B$ ist. [4 P.]
- c) Berechnen Sie den hyperbolischen Radius und das hyperbolische Zentrum des hyperbolischen Kreises K . [3 P.]

Hinweis. b) Die Formel (2) des Satzes 1.3.8 im Skript kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\operatorname{ch} \rho(a + ib, x + iy) = 1 + \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2}{2by}.$$

Mit Hilfe dieser Formel beweisen Sie die obere Aussage.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 4. Sei ABC das hyperbolische Dreieck ABC , wobei $A = i$, $B = \sqrt{5}i$, $C = 2 + i$ ist.

a) Berechnen Sie die hyperbolischen Winkel dieses Dreiecks. Dabei darf die Funktion arctan benutzt werden.

[5 P.]

b) Berechnen Sie den hyperbolischen Flächeninhalt dieses Dreiecks.

[1 P.]