Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

WiSe 2014/15
Abgabe am **19**.12.2014
von 14:15 bis 16:00 Uhr im Raum 25.22.03.58

Fuchssche Gruppen
Übungsblatt 5

`Definition.` Sei X ein topologischer Raum.

(a) Eine Teilmenge Y heißt *dicht* in X, wenn für jedes $x \in X$ und jede Umgebung U um x ein Element $y \in Y$ in U existiert.

(b) Der Raum X heißt *separabel*, wenn X eine dichte abzählbare Teilmenge Y besitzt[a].

(c) Der Raum X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn eine abzählbare Menge von offenen Teilmengen $U_1, U_2, \ldots$ existiert, so dass zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U um x ein U_i mit $x \in U_i \subseteq U$ existiert.

[a] Somit ist $\mathbb{R}$ bezüglich der üblichen Topologie separabel.

Aufgabe 1. Beweisen Sie:
Jeder separable metrische Raum (X, d) erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. [5 P.]

Aufgabe 2. (leicht!) Wir definieren etwas feinere als klassische Topologie auf $\mathbb{R}$, indem wir sagen, dass die Basis der neuen Topologie aus den Mengen der Form $[a, b)$ $(a < b)$ besteht. Sei $\widehat{R}$ der resultierte topologische Raum.

(a) Beweisen Sie, dass $\widehat{R}$ separabel ist. [2 P.]

(b) Beweisen Sie, dass $\widehat{R}$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt. [3 P.]

`Bemerkung.` Aus Aufgaben 1 und 2 folgt sofort, dass $\widehat{R}$ nicht metrisierbar ist. Das war die Aufgabe 5 im Übungsblatt 4.

Aufgabe 3. Beweisen Sie: Die Gruppe $\{T_A \mid A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])\}$ ist keine Fuchssche Gruppe. [5 P.]

Hinweis. Hier ist $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Es gibt ein Satz in der Zahlentheorie[1], dass unendlich viele $p, q \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{q^2}$$

existieren. Benutzen Sie den Satz, um eine Folge von Matrizen $A_n \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ mit $A_n \to E$ zu konstruieren. Denken Sie über die oberen Dreiecksmatrizen.

Fortsetzung Seite 2.

[1] Siehe Dirichletscher Approximationssatz in Wikipedia.

In der nächsten Vorlesung werden wir den folgenden Satz beweisen:

`Satz (Jorgensen-Ungleichung)` Seien $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, so dass $\langle A, B\rangle$ eine nicht elementare Fuchssche Gruppe ist. Dann gilt:

$$|\mathrm{Tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geqslant 1.$$

Aufgabe 4. Seien [5 P.]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

zwei Matrizen aus $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass die Jorgensen-Ungleichung für diese A, B genau dann erfüllt ist, wenn $|c| \geqslant 1$ ist.

Keine weiteren Aufgaben.