Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

WS 2014/15
13.02.2015

Klausur Fuchssche und Kleinsche Gruppen

Aufgabe 1.

(a) Sei ℓ die Geodäte in $\mathbb{H}$, die durch 0 und ∞ läuft. Für jeden Punkt $w \in \mathbb{H}$ sei w' der Punkt auf l mit minimalem hyperbolischem Abstand von w. Beweisen Sie, dass die Geodäten ℓ und $[w, w']$ sich unter rechten Winkel treffen. [5 P.]

(b) Berechnen Sie den hyperbolischen Abstand von $w := 3 + 4i$ bis ℓ. [5 P.]

(c) Berechnen Sie die hyperbolische Länge des euklidschen Segments von $w = 3 + 4i$ bis $4i$. [5 P.]

(d) Berechnen Sie den hyperbolischen Flächeninhalt des hyperbolischen Dreiecks OAB, wobei $O = 0$, $A = 3 + 4i$ und $B = 5i$ ist. [5 P.]

Aufgabe 2. Seien Δ_1 und Δ_2 zwei Dreiecks in $\mathbb{H}$ mit Eckpunkten auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Beweisen Sie, dass es eine Isometrie von $\mathbb{H}$ gibt, die Δ_1 nach Δ_2 abbildet. [5 P.]

Aufgabe 3. Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es ist bekannt, dass der Kern des natürlichen Epimomorphismus $\varphi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2)$ gleich $\langle A^2, B^2 \rangle$ ist und dass $|\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2)| = 6$ ist. Sei $G := \langle A^2, B^2, C \rangle$.

(a) Berechnen Sie den Index von G in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. [5P.]

(b) Malen Sie einen Fundamentalbereich für G in $\mathbb{H}$. Geben Sie eine Begründung. [5P.]

(c) Ist der Fundamentalbereich ein Dirichlet-Bereich? [5P.]

Aufgabe 4. Seien $G_1 = \langle g_1 \rangle$ und $G_2 = \langle g_2 \rangle$ zwei Untergruppen von $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$ mit

$$g_1(z) = z + 2\pi, \quad g_2(z) = z/(z + 1).$$

Wir betrachten zwei Regionen:

$$D_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid -\pi < \mathrm{Re}(z) < \pi\},$$
$$D_2 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z + 1| > 1\} \cap \{z \in \mathbb{H} \mid |z - 1| > 1\}.$$

Merken wir an, dass $D_1 \cup D_2 = \mathbb{H}$ ist. Sei $D = D_1 \cap D_2$ und sei $G = \langle G_1, G_2 \rangle$.
Beweisen Sie:

(a) Es gilt $g(D_1) \cap D_1 = \emptyset$ für alle $g \in G_1 \setminus \{1\}$. [5 P.]

Es gilt $g(D_2) \cap D_2 = \emptyset$ für alle $g \in G_2 \setminus \{1\}$. [5 P.]

(b) Sei $g = a_n \circ b_n \circ \cdots \circ a_1 \circ b_1$ ein Element in G mit $a_i \in G_1 \setminus \{1\}$, $b_i \in G_2 \setminus \{1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Beweisen Sie per Induktion, dass $g(D_2) \subseteq \mathbb{H} \setminus D_1$ ist. [5 P.]

(c) Analog zu (b) kann man beweisen, dass jedes alternierende Produkt nichttrivialer Elemente von G_1 und G_2 den Bereich D auf $\mathbb{H} \setminus D$ abbildet.[1] Leiten Sie daraus ab, dass G diskret ist. [5 P.]

(d) Finden Sie eine unendliche Menge hyperbolischer Elemente in G, die paarweise verschiedene Achsen haben. Beweisen Sie, dass G keine elliptischen Elemente enthält. [5 P.]

(e) Geben Sie zwei hyperbolische Elemente an, die G erzeugen. [5 P.]

[1] Daraus folgt, dass $g \neq 1$ für $n \geqslant 1$ ist. Mit anderen Worten ist G eine freie Gruppe mit der Basis $\{g_1, g_2\}$.