Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

WS 2014/15
4.03.2015

Lösungen zur zweiten Klausur Fuchssche und Kleinsche Gruppen

Aufgabe 1.

(a) Geben Sie Definitionen von elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Elementen von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. [2 P.]

(b) Geben Sie kanonische Matrizen für diese Typen der Elemente. [2 P.]

(c) Beschreiben Sie mit Bildern die Dynamik der Wirkung dieser Typen von Elementen auf $\widehat{\mathbb{H}}$. [3 P.]

Siehe Skript.

Aufgabe 2.

(a) Berechnen Sie den hyperbolischen Abstand von $A = i$ bis zur euklidschen Strecke [5 P.]

$$[BC]_{\text{eukl}} = \{i + t | 1 \leqslant t \leqslant 2\}.$$

(b) Berechnen Sie die hyperbolische Länge der euklidschen Strecke mit den Eckpunkten $A = 1 + i$ und $B = 2 + 3i$. [5 P.]

(c) Berechnen Sie den hyperbolischen Flächeninhalt des euklidschen Dreiecks ABC, wobei $A = i$, $B = 1 + i$ und $C = 1 + 2i$ ist. [5 P.]

Lösung. (a) Wir werden folgende Formel benutzen:

$$\rho(z, w) = \ln \frac{|z - \overline{w}| + |z - w|}{|z - \overline{w}| - |z - w|}.$$

Wir suchen ein $1 \leqslant t \leqslant 2$, so dass $\rho(i, t + i)$ minimal ist. Nach der oberen Formel ist

$$\rho(i, t + i) = 2 \cdot \ln\Big(\frac{\sqrt{t^2 + 4} + t}{2}\Big).$$

Diese Funktion ist strikt monoton wachsend auf $[1, 2]$. Deswegen nimmt sie ihr Minimum auf $[1, 2]$ im Punkt $t = 1$ an. Dann haben wir

$$\rho(A, [BC]_{\text{eukl}}) = 2 \ln \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}.$$

(b) Wir parametrisieren die Strecke γ:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1+t, \\ y(t) &= 1+2t, \end{aligned}$$

$0 \leqslant t \leqslant 1$. Dann gilt

$$h(\gamma) := \int_0^1 \frac{\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}}{y(t)}\, dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{1+2t}\, dt = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \ln(1+2t)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \ln 3.$$

(c)

$$\begin{aligned} F &= \int_{ABC} \frac{\mathrm{dx}\ \mathrm{dy}}{y^2} = \int_1^2 \Big(\int_1^x \frac{1}{y^2}\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx} = \int_1^2 \Big(-\frac{1}{y}\Big)\Big|_1^x\,\mathrm{dx} \\ &= \int_1^2 \Big(-\frac{1}{x}+1\Big)\,\mathrm{dx} = (x - \ln x)|_1^2 = (2-\ln 2) - 1 = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.

(a) Formulieren Sie den Satz von Jorgensen. [3 P.]

(b) Die folgende Matrix ist elliptisch und hat die Ordnung 7 in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{7} & -\sin\frac{\pi}{7} \\ \sin\frac{\pi}{7} & \cos\frac{\pi}{7} \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine elliptische Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

der Ordnung 2 in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, so dass $G := \langle A, B\rangle$ nicht diskret und nicht elementar ist. [5 P.]

(c) Seien C_1 und C_2 zwei Möbiustransformationen der Ordnung 2 mit verschiedenen Fixpunkten in $\mathbb{H}$. Beweisen Sie, dass die Gruppe $\langle C_1, C_2\rangle$ diskret und elementar ist. [5 P.]

Hinweis zu (b):
- $\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = 2 + ((a-d)^2 + (b+c)^2)\sin^2(\frac{\pi}{7})$.
- Wenn X elliptisch ist, dann ist YXY^{-1} auch elliptisch.

Lösung.

(a) Jorgensen-Ungleichung: Seien $T, S \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, so dass $\langle T, S\rangle$ eine nicht elementare diskrete Gruppe ist. Dann gilt:

$$|\mathrm{Tr}^2(T) - 4| + |\mathrm{Tr}(TST^{-1}S^{-1}) - 2| \geqslant 1.$$

(b) Angenommen, dass $G := \langle A, B\rangle$ nicht elementar ist. Nach Jorgensen wird dann aus

$$|\mathrm{Tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| < 1$$

folgen, dass G nicht diskret ist. Wir analysieren diese Ungleichung in unserem Fall:

$$|\Big(2\cos(\frac{\pi}{7})\Big)^2 - 4| + |\Big((a-d)^2 + (b+c)^2\Big) \cdot \sin^2(\frac{\pi}{7})| < 1.$$

Da $\Big(2\cos(\frac{\pi}{7})\Big)^2 - 4 = -4\sin^2(\frac{\pi}{7})$ ist, ist das dem folgenden äquivalent:

$$\Big(4 + (a-d)^2 + (b+c)^2\Big) \cdot \sin^2(\frac{\pi}{7}) < 1.$$

Mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wird diese Ungleichung stimmen, weil $4\sin^2(\frac{\pi}{7}) < 4\sin^2(\frac{\pi}{6}) = 1$ ist. Die Matrix B hat die Ordnung 2 in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Mit diesem B ist aber $\langle A, B\rangle$ elementar, da A und B den gemeinsamen Fixpunkt i haben. Deswegen definieren wir ein neues $B := YBY^{-1}$, wobei

- Y sich wenig von der trivialen Matrix E unterscheidet (damit die obere Ungleichung gültig bleibt) und
- $Y(i) \neq i$ ist (diese soll garantieren, dass $\langle A, B\rangle$ nicht elementar ist, siehe Lemma unten).

> *Lemma.* Seien A und B elliptische Elemente, die verschiedene Fixpunkte haben. Sei $\mathrm{Ord}(A) \geqslant 3$. Dann ist $G := \langle A, B\rangle$ nicht elementar.

Beweis. Sei $\mathrm{Ord}(A) = n \geqslant 3$. Wären alle Elemente von $G \setminus \{1\}$ elliptisch, dann hätte G einen gemeinsamen Fixpunkt (siehe Satz 2.7.3), was unmöglich ist. Deswegen besitzt $G \setminus \{1\}$ ein parabolisches oder ein hyperbolisches Element g.

Dann hat g ein oder zwei Fixpunkte auf dem Rand von $\mathbb{H}$; alle anderen Orbits von g in $\widehat{\mathbb{H}}$ sind unendlich. Das Element A hat einen Fixpunkt in $\mathbb{H}$; alle anderen Orbits von A in $\widehat{\mathbb{H}}$ sind n-elementig. Deswegen hat G keinen endlichen Orbit. □

Konkret kann man folgendes B nehmen:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Sei z_i der Fixpunkt von C_i, $i = 1, 2$. Sei ℓ die unendliche Geodäte, die durch z_1 und z_2 läuft. Nach einer Konjugation, können wir annehmen, dass ℓ durch 0 und ∞ läuft.

- Da C_1 und C_2 Rotationen um z_1 und z_2 um 180° sind, ist ℓ bezüglich C_1 und C_2 invariant. Dann ist die Menge $\{0, \infty\}$ bezüglich $G := \langle C_1, C_2\rangle$ invariant. Da G eine endliche invariante Menge in $\widehat{\mathbb{H}}$ hat, ist G elementar.
- Sei z_0 ein Punkt in ℓ zwischen z_1 und z_2. Sei $W := W(C_1, C_2)$ ein nichtleeres Wort in dem Alphabet $\{C_1, C_2\}$. Man kann per Induktion zeigen, dass $W(z_0)$ in $\ell \setminus [z_1, z_2]$ liegt. Das impliziert, dass G diskret ist.

Aufgabe 4. Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es ist bekannt, dass der Kern des natürlichen Epimomorphismus $\varphi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_\mathbf{2})$ gleich $\langle A^2, B^2 \rangle$ ist und dass $|\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2)| = 6$ ist. Sei $G := \langle A, B^2 \rangle$.

(a) Beweisen Sie, dass der Index von G in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ gleich 3 ist. [5P.]

(b) Es ist bekannt, dass $1, C, C^2$ Repräsentanten der rechten Nebenklassen von G in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sind. Malen Sie einen Fundamentalbereich für G in $\mathbb{H}$. [5P.]

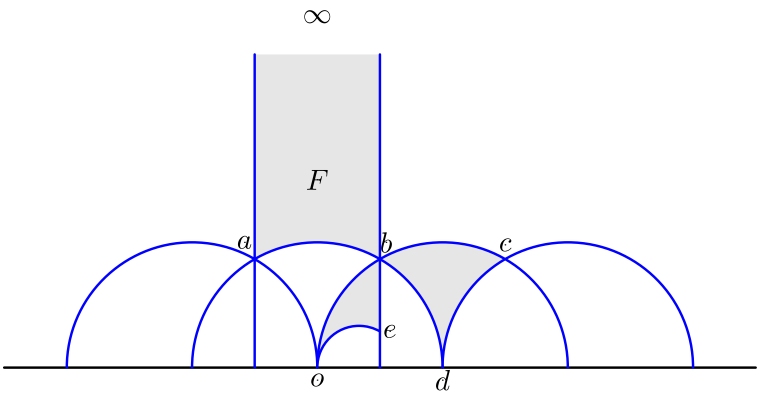
Lösung. a) Für $H \leqslant G$ benutzen wir die allgemeine Bezeichnung $|G : H|$ für den Index von H in G. Wegen $\ker(\varphi) = \langle A^2, B^2 \rangle$ gilt $\varphi(G) = \varphi(\langle A, B^2 \rangle) = \langle \varphi(A) \rangle$. Die Ordnung von $\varphi(A)$ ist gleich 2. Dann gilt

$$|\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) : G| = |\varphi(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})) : \varphi(G)| = |\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2) : \langle \varphi(A) \rangle| = 6/2 = 3.$$

(b) Sei F der Fundamentalbereich für $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ aus dem Satz 3.2.7. Nach Satz 3.1.4 ist

$$\widetilde{F} := F \cup C(F) \cup C^2(F)$$

ein Fundamentalbereich für G.



Hier ist $o = 0$, $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $d = 1$, $e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i$.