

# Fuchssche Gruppen, WiSe 2014/15

(Prof. Dr. O. Bogopolski)

## 1 Hyperbolische Geometrie

### 1.1 Hyperbolische Metrik

Die *hyperbolische* (oder Lobachevsky) *Ebene* ist das Paar  $(\mathbb{H}, h)$ , wobei

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

die “obere” offene Halbebene der komplexen Zahlen und  $h$  eine bestimmte Funktion ist (siehe unten), die jeder  $C^1$ -Kurve  $\gamma$  in  $\mathbb{H}$  eine nichtnegative reelle Zahl  $h(\gamma)$  zuordnet.

Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  eine  $C^1$ -Kurve, d.h.  $\gamma'(t)$  existiert für alle  $t \in [0, 1]$  und ist stetig. Wir schreiben

$$\gamma(t) = \underbrace{x(t) + iy(t)}_{z(t)}, \quad t \in [0, 1].$$

Die *hyperbolische Länge* von  $\gamma$  wird folgendermaßen definiert:

$$h(\gamma) := \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{|z'(t)|}{\text{Im}(z(t))} dt.$$

Der *hyperbolische Abstand* zwischen zwei Punkten  $z, w \in \mathbb{H}$  ist

$$\rho(z, w) := \inf h(\gamma),$$

wobei  $\gamma$  über die Menge aller  $C^1$ -Kurven von  $z$  bis  $w$  läuft.

**Behauptung 1.1.1** Die Funktion  $\rho : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Metrik auf  $\mathbb{H}$ , d.h.  $\rho$  erfüllt die folgenden Axiome:

- 1)  $\rho(z, z) = 0$  und  $\rho(z, w) > 0$  falls  $z \neq w$ ,
- 2)  $\rho(z, w) = \rho(w, z)$ ,
- 3)  $\rho(z, w) \leq \rho(z, \zeta) + \rho(\zeta, w)$ .

*Beweis.* 1) wird im Satz 1.2.7 bewiesen, 3) wird in Folgerung 1.2.9 bewiesen. Wir beweisen 2). Sei  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , eine  $C^1$ -Kurve von  $z$  bis  $w$ . Wir definieren  $s(t) := 1 - t$ . Dann ist  $\gamma_1(t) := \gamma(s(t)) = x(s(t)) + iy(s(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , eine  $C^1$ -Kurve von  $w$

bis  $z$ . In der folgenden Berechnung benutzen wir die Kettenregel für die Differenzierung und die Substitutionsregel für die Integrierung.

$$\begin{aligned} h(\gamma_1) &:= \int_0^1 \frac{|\gamma_1'(t)|}{y_1(t)} dt = \int_0^1 \frac{|\gamma'(s(t)) \cdot s'(t)|}{y(s(t))} dt = \int_0^1 \frac{|\gamma'(s(t))|}{y(s(t))} dt \\ &= - \int_0^1 \frac{|\gamma'(s(t))|}{y(s(t))} \cdot s'(t) dt = - \int_1^0 \frac{|\gamma'(s)|}{y(s)} ds = \int_0^1 \frac{|\gamma'(s)|}{y(s)} ds = h(\gamma). \end{aligned}$$

□

## 1.2 Die Gruppe der Möbius-Transformationen

Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ , d.h.  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc = 1$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

heißt mit  $A$  assoziierte *Möbius-Transformation* von  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Dabei ist

$$\frac{a\infty + b}{c\infty + d} := \begin{cases} a/c, & \text{falls } c \neq 0 \text{ ist,} \\ \infty, & \text{falls } c = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Merken wir an:

$$T_A \circ T_B = T_{AB}, \quad T_E = id, \tag{1.2.1}$$

wobei  $E$  die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Gruppe

$$\text{Möb}_{\mathbb{C}} := \{T_A \mid A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})\}$$

bezüglich der Komposition heißt *Gruppe der Möbius-Transformationen* von  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Die Teilmenge

$$\text{Möb}_{\mathbb{R}} := \{T_A \mid A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})\}$$

ist eine Untergruppe von  $\text{Möb}_{\mathbb{C}}$ .

**Satz 1.2.1** Jede Transformation  $T_A \in \text{Möb}_{\mathbb{R}}$  bildet die Menge  $\mathbb{H}$  homöomorph auf sich ab.

*Beweis.* Wir bezeichnen  $w = T_A(z)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} w &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}, \\ \text{Im}(w) &= \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i|cz + d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Daraus folgt: Ist  $\text{Im}(z) > 0$ , dann ist  $\text{Im}(w) > 0$ . Deshalb bildet  $T_A$  die Menge  $\mathbb{H}$  auf sich. Die Bijektivität von  $(T_A)|_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  folgt aus der Formel  $(T_A)|_{\mathbb{H}} \circ (T_{A^{-1}})|_{\mathbb{H}} = id|_{\mathbb{H}}$ . Die Stetigkeit von  $(T_A)|_{\mathbb{H}}$  und von der inversen Abbildung  $(T_{A^{-1}})|_{\mathbb{H}}$  ist offensichtlich. □

**Definition 1.2.2 .**

- 1) Durch  $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$  wird die Menge der auf  $\mathbb{H}$  eingeschränkten Abbildungen aus  $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$  bezeichnet.
- 2) Durch  $Z(G)$  wird das *Zentrum* der Gruppe  $G$  bezeichnet. Es gilt:

$$Z(\text{GL}_2(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \quad Z(\text{SL}_2(\mathbb{R})) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- 3) Die Gruppen

$$\text{PGL}_2(\mathbb{R}) := \text{GL}_2(\mathbb{R})/Z(\text{GL}_2(\mathbb{R})) \quad \text{und} \quad \text{PSL}_2(\mathbb{R}) := \text{SL}_2(\mathbb{R})/Z(\text{SL}_2(\mathbb{R})).$$

heißen *projektive allgemeine lineare Gruppe* und *projektive spezielle lineare Gruppe*.

**Satz 1.2.3**  $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}} \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \text{SL}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}} \\ A &\mapsto (T_A)_{|\mathbb{H}} \end{aligned}$$

ist ein Epimorphismus mit  $\text{Ker}\phi = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Deswegen gilt

$$(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}} \cong \text{SL}_2(\mathbb{R})/\text{Ker}\phi \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

□

**Satz 1.2.4** Die Transformationen aus  $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$  erhalten die hyperbolischen Längen der  $C^1$ -Kurven in  $\mathbb{H}$ .

*Beweis.* Sei

$$\begin{aligned} T : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H}, \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

eine Transformation aus  $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$  mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Sei  $z(t) = x(t) + iy(t)$  eine differenzierbare Kurve in  $\mathbb{H}$ . Wir betrachten  $w(t) := T(z(t))$ . Nun beweisen wir  $h(w) = h(z)$ :

$$h(w) = \int_0^1 \frac{|w'(t)|}{\text{Im}(w(t))} dt = \int_0^1 \frac{|T'(z(t)) \cdot z'(t)|}{\text{Im}(T(z(t)))} dt. \quad (1.2.3)$$

Dabei gilt

$$T'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Wir substituieren das in die Formel (1.2.2). Dann gilt

$$\left| T'(z) \right| = \frac{\operatorname{Im}(T(z))}{\operatorname{Im}(z)}. \quad (1.2.4)$$

Mit Hilfe der Formel (1.2.3) bekommen wir

$$h(w) = \int_0^1 \frac{|z'(t)|}{\operatorname{Im}(z(t))} dt = h(z).$$

□

**Definition 1.2.5** a) Sei  $I_r$  der offene euklidische Strahl in  $\mathbb{H}$ , der im Punkt der reellen Achse mit der  $x$ -Koordinate  $r$  startet und senkrecht zur Achse läuft.

b) Sei  $K_{r_1, r_2}$  der offene euklidische Halbkreis in  $\mathbb{H}$ , dessen Endpunkte auf der reellen Achse liegen und die  $x$ -Koordinaten  $r_1$  und  $r_2$  haben ( $r_1 < r_2$ ).

Diese Strahlen und Halbkreise heißen *Geodäten* in  $\mathbb{H}$ .

c) Für je zwei verschiedene Punkte  $z_1, z_2$  in  $\mathbb{H}$  definieren wir eine Kurve  $[z_1, z_2]$  in  $\mathbb{H}$  mit Anfang  $z_1$  und Ende  $z_2$ :

*Fall 1.*  $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ .

Dann existiert ein eindeutiger Strahl  $I_r$ , der  $z_1, z_2$  enthält. Sei  $[z_1, z_2]$  das Segment dieses Strahls von  $z_1$  bis  $z_2$ .

*Fall 2.*  $\operatorname{Re}(z_1) \neq \operatorname{Re}(z_2)$ .

Dann existiert ein eindeutiger euklidischer Halbkreis  $K_{r_1, r_2}$ , der  $z_1, z_2$  enthält. Sei  $[z_1, z_2]$  der Bogen dieses Halbkreises von  $z_1$  bis  $z_2$ .

In beiden Fälle heißt  $[z_1, z_2]$  *geodätes Segment* von  $z_1$  bis  $z_2$ .

**Lemma 1.2.6** .

a) Es existiert eine Transformation aus  $\operatorname{Möb}_{\mathbb{R}}$ , die  $I_r$  auf  $I_0$  abbildet.

b) Es existiert eine Transformation aus  $\operatorname{Möb}_{\mathbb{R}}$ , die  $K(r_1, r_2)$  auf  $I_0$  abbildet.

**Satz 1.2.7** Seien  $z_1$  und  $z_2$  zwei verschiedene Punkte in  $\mathbb{H}$  und sei  $\gamma$  eine beliebige  $C^1$ -Kurve in  $\mathbb{H}$  von  $z_1$  bis  $z_2$ . Dann gilt:

1)  $h(\gamma) \geq h([z_1, z_2]) > 0$ ;

2)  $h(\gamma) = h([z_1, z_2])$  gilt genau dann, wenn  $\gamma = [z_1, z_2]$  gilt.

*Beweis.* 1) Nach Lemma 1.2.6 und Satz 1.2.4, kann man annehmen, dass  $z_1 = ia$  und  $z_2 = ib$  ( $b > 0$ ) gilt. Mit der Bezeichnung  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  erhalten wir

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| = \left| \ln(y(t)) \Big|_0^1 \right| = \left| \ln \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1)} \right| = \ln \frac{b}{a} .$$

Jetzt beweisen wir, dass

$$h([z_1, z_2]) = \ln \frac{b}{a}$$

gilt. Dafür parametrisieren wir das Segment  $\gamma_1 = [z_1, z_2]$  wie folgt:  $\gamma_1(t) = i(a + t(b - a))$ ,  $t \in [0, 1]$ . Dann haben wir

$$h(\gamma_1) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt = \int_0^1 \frac{b - a}{a + t(b - a)} dt = \ln(a + t(b - a)) \Big|_0^1 = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

Die Behauptung 1) ist bewiesen; 2) folgt aus dem Beweis von 1).  $\square$

**Bemerkung 1.2.8** Sei  $\gamma$  eine  $C^1$ -Kurve in  $\mathbb{H}$  von  $z_1$  bis  $z_2$ . Dann gilt

$$h(\gamma) \geq \left| \ln \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1)} \right|.$$

Insbesondere gilt

$$\rho(z_1, z_2) \geq \left| \ln \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1)} \right|.$$

**Folgerung 1.2.9** .

1) Für je zwei Punkte  $z_1, z_2$  in  $\mathbb{H}$  gilt

$$\rho(z_1, z_2) = h([z_1, z_2]).$$

2) Für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , gilt

$$\rho(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}.$$

3) Für je drei Punkte  $z_1, z_2, z_3$  in  $\mathbb{H}$  gilt

$$\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3).$$

Die Gleichung gilt genau dann, wenn  $z_2 \in [z_1, z_3]$  ist.

*Beweis.*

1) folgt aus dem Satz 1.2.7. Die Behauptung 2) wurde im Beweis des Satzes 1.2.7 bewiesen.

3) O.B.d.A,  $z_1 = ia$ ,  $z_3 = ib$  ( $b > a$ ). Dann gilt

$$\rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \geq \left| \ln \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1)} \right| + \left| \ln \frac{\operatorname{Im}(z_3)}{\operatorname{Im}(z_2)} \right| \geq \ln \frac{\operatorname{Im}(z_2)}{\operatorname{Im}(z_1)} + \ln \frac{\operatorname{Im}(z_3)}{\operatorname{Im}(z_2)} = \ln \frac{\operatorname{Im}(z_3)}{\operatorname{Im}(z_1)} = \ln \frac{b}{a} = \rho(z_1, z_3).$$

$\square$

### 1.3 Einige Formeln für die hyperbolische Metrik $\rho$ auf $\mathbb{H}$

**Definition 1.3.1** Die Menge  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  heißt *Riemansche Sphere*. Das *Doppelverhältnis* von vier verschiedenen Punkten  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$  ist

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}.$$

**Lemma 1.3.2** Es gilt  $SL_2(\mathbb{R}) = \langle \{A_r, B_r \mid r \in \mathbb{R}\} \rangle = \langle \{A_r \mid r \in \mathbb{R}\} \cup \{C\} \rangle$ , wobei

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

**Folgerung 1.3.3** Es gilt  $Möb_{\mathbb{R}} = \langle \{\varphi_r \mid r \in \mathbb{R}\} \cup \{\psi\} \rangle$ , wobei

$$\varphi_r : z \rightarrow z + r,$$

$$\psi : z \mapsto -\frac{1}{z}$$

ist.

**Bemerkung 1.3.4** Es gibt noch einige nützliche Abbildungen aus  $Möb_{\mathbb{R}}$ :

$$\theta_k : z \mapsto kz \quad (k \in \mathbb{R}_+).$$

**Satz 1.3.5** Das Doppelverhältnis ist  $Möb_{\mathbb{R}}$ -invariant.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Folgerung 1.3.3. □

**Satz 1.3.6** Seien  $z, w$  zwei verschiedene Punkte in  $\mathbb{H}$ . Seien  $z^*$  und  $w^*$  die Enden der Geodäte, die durch  $z$  und  $w$  läuft. Wir nehmen an, dass die Reihenfolge der vier Punkte in der Geodäte  $z^*, z, w, w^*$  ist (siehe Fig.1). Dann gilt:

$$\rho(z, w) = \ln(w, z^*; z, w^*).$$

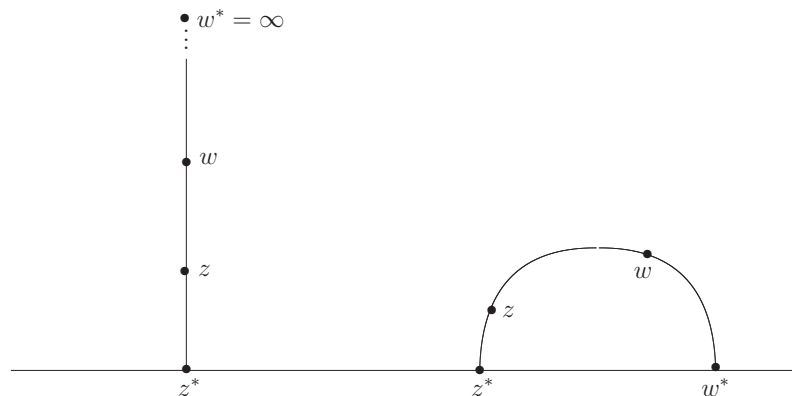


Fig. 1.

*Beweis.* Nach Lemma 1.2.6 existiert ein  $T \in \text{Möb}_{\mathbb{R}}$ , das die Geodäte auf die imaginäre Achse abbildet. Mit Hilfe von Abbildungen  $\theta_k$  und  $\psi$  und mit Hilfe des Satzes 1.3.5, können wir annehmen, dass  $T(z^*) = 0$ ,  $T(w^*) = \infty$  gilt. Dann gilt  $T(z) = ia$  und  $T(w) = ib$  für einige  $0 < a < b$ . Nach Folgerung 1.2.9 gilt

$$\rho(z, w) = \rho(T(z), T(w)) = \rho(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}.$$

Es gilt auch

$$(w, z^*; z, w^*) = (T(w), T(z^*); T(z), T(w^*)) = (ib, 0; ia, \infty) = \frac{(ib - 0)(ia - \infty)}{(0 - ia)(\infty - ib)} = \frac{b}{a}.$$

□

**Definition 1.3.7** Wir definieren die folgenden drei Funktionen aus  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \text{ch}(t) &: = \frac{e^t + e^{-t}}{2} && \text{(hyperbolischer Cosinus),} \\ \text{sh}(t) &: = \frac{e^t - e^{-t}}{2} && \text{(hyperbolischer Sinus),} \\ \text{th}(t) &: = \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} && \text{(hyperbolischer Tangens)} \end{aligned}$$

**Satz 1.3.8** Für je zwei Punkte  $z, w \in \mathbb{H}$  gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad \rho(z, w) &= \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}, \\ (2) \quad \text{ch } \rho(z, w) &= 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \text{Im}(z) \text{Im}(w)}, \\ (3) \quad \text{sh} \left[ \frac{1}{2} \rho(z, w) \right] &= \frac{|z - w|}{2 (\text{Im}(z) \text{Im}(w))^{1/2}}, \\ (4) \quad \text{ch} \left[ \frac{1}{2} \rho(z, w) \right] &= \frac{|z - \bar{w}|}{2 (\text{Im}(z) \text{Im}(w))^{1/2}}, \\ (5) \quad \text{th} \left[ \frac{1}{2} \rho(z, w) \right] &= \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|. \end{aligned}$$

*Beweis.* Man kann direkt zeigen, dass diese Gleichungen äquivalent sind. Deswegen genügt es, die Gleichung (3) zu beweisen.

Nach Satz 1.2.4 ist die linke Seite von (3)  $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$ -invariant. Mit Hilfe der Folgerung 1.3.3 überprüfen wir, dass die rechte Seite von (3) auch  $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$ -invariant ist. Die rechte Seite von (3) ist offensichtlich  $\varphi_r$ -invariant. Wir überprüfen, dass sie  $\psi$ -invariant ist:

$$\frac{|\psi(z) - \psi(w)|}{2 (\text{Im}(\psi(z)) \text{Im}(\psi(w)))^{1/2}} = \frac{\left| \frac{-1}{z} - \frac{-1}{w} \right|}{2 \left( \text{Im}\left(\frac{-1}{z}\right) \text{Im}\left(\frac{-1}{w}\right) \right)^{1/2}} = \frac{\left| \frac{-1}{z} - \frac{-1}{w} \right|}{2 \left( \frac{\text{Im}(z)}{|z|^2} \frac{\text{Im}(w)}{|w|^2} \right)^{1/2}} = \frac{|z - w|}{2 (\text{Im}(z) \text{Im}(w))^{1/2}}.$$

Deswegen, nach der Anwendung eines passenden  $T \in \text{Möb}_{\mathbb{R}}$ , können wir annehmen, dass  $z = ia, w = ib$  ( $a < b$ ) ist. Mit der Formel  $\rho(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}$  ist (3) leicht zu überprüfen. □

## 1.4 Isometrien von $\mathbb{H}$

**Definition 1.4.1** Eine Abbildung  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  heißt *Isometrie*, falls  $\rho(f(z_1), f(z_2)) = \rho(z_1, z_2)$  für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  gilt.

Die Menge aller Isometrien der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}$  bildet eine Gruppe.<sup>1</sup> Diese Gruppe wird mit  $\text{Isom}(\mathbb{H})$  bezeichnet.

**Lemma 1.4.2** 1) Es gilt  $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}} \leq \text{Isom}(\mathbb{H})$ .

2) Isometrien bilden Geodäten auf Geodäten ab.

*Beweis.* 1) folgt aus dem Satz 1.2.4. Wir beweisen 2). Sei  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{H})$ . Mit Hilfe des Satzes 1.2.9 haben wir

$$\begin{aligned} z_2 \in [z_1, z_3] &\Leftrightarrow \rho(z_1, z_3) = \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \\ &\Leftrightarrow \rho(\varphi(z_1), \varphi(z_3)) = \rho(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) + \rho(\varphi(z_2), \varphi(z_3)) \\ &\Leftrightarrow \varphi(z_2) \in [\varphi(z_1), \varphi(z_3)]. \end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung 2) aus dem Fakt, dass Geodäten Vereinigungen von geodäten Segmenten sind.  $\square$

**Satz 1.4.3** Wir betrachten die Abbildung  $\eta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $z \mapsto -\bar{z}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Isom}(\mathbb{H}) &= \langle (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}, \eta \rangle \\ &\cong \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir beweisen  $\text{Isom}(\mathbb{H}) \leq \langle (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}, \eta \rangle$ . Sei  $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{H})$ . Dann bildet  $\varphi$  Geodäten auf Geodäten ab. Sei  $I := \{ir \mid r > 0\}$ . Dann ist  $\varphi(I)$  eine Geodäte. Nach Lemma 1.2.6 existiert ein  $T \in (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$ , so dass  $T \circ \varphi(I) = I$  ist. Dank der Abbildungen  $z \mapsto kz$  ( $k > 0$ ) und  $z \mapsto -\frac{1}{z}$  kann man annehmen, dass  $T \circ \varphi$  den Punkt  $i$  fixiert und die Achsen  $(0, i]$  und  $[i, \infty)$  auf sich abbildet. Daraus folgt, dass die Isometrie  $T \circ \varphi$  alle Punkte auf  $I$  fixiert. Sei  $z = x + iy \in \mathbb{H}$  und sei  $T \circ \varphi(z) = u + iv$ . Dann gilt für alle  $t > 0$ :

$$\rho(x + iy, it) = \rho(T \circ \varphi(z), T \circ \varphi(it)) = \rho(u + iv, it).$$

Nach Satz 1.3.8 (3) folgt

$$\frac{x^2 + (y - t)^2}{ty} = \frac{u^2 + (v - t)^2}{tv}.$$

Daraus folgt  $v = y$  und  $x = \pm u$ . Also gilt  $T \circ \varphi(z) \in \{z, -\bar{z}\}$ . Da jede Isometrie stetig ist, ist  $T \circ \varphi$  entweder trivial oder  $\eta$ .  $\square$

<sup>1</sup>Das wird aber klar nur nach Satz 1.4.3.



## 1.5 Hyperbolischer Flächeninhalt

**Definition 1.5.1** Sei  $A$  eine offene Menge in  $\mathbb{H}$ . Der *hyperbolische Flächeninhalt* von  $A$  wird mit folgender Formel definiert:

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2}.$$

In dem Integral soll  $A$  als eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  betrachtet werden.

**Bemerkung 1.5.2** (*Transformationsformel*)

- Sei  $A$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^2$ .
- Sei  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine injektive differenzierbare Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen. Wir schreiben  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  mit  $\varphi_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  und benutzen Jacobian von  $\varphi$ :

$$J(\varphi) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

- Sei  $f : \varphi(A) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion  $f$  auf  $\varphi(A)$  integrierbar genau dann wenn die Funktion  $(f \circ \varphi) \cdot |J(\varphi)|$  auf  $A$  integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\varphi(A)} f(x, y) dx dy = \int_A (f \circ \varphi)(x, y) \cdot |J(\varphi)(x, y)| dx dy.$$

**Satz 1.5.3** Für alle offene Teilmengen  $A \subseteq \mathbb{H}$  und alle  $T \in (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$  gilt

$$\mu(T(A)) = \mu(A).$$

*Beweis.* Sei

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1),$$

Wir schreiben  $z = x + iy$ . Dann existieren Funktionen  $u, v$  mit  $T(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Da  $T$  komplex-differenzierbar (holomorph) ist, gelten die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen berechnen wir das Jacobian der Abbildung

$$\varphi : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

$$J(\varphi) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|^2 = \left|\frac{dT}{dz}\right|^2 = \frac{1}{|cz + d|^4}.$$

Dann gilt<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\mu(T(A)) &= \int_{T(A)} \frac{dx dy}{(\operatorname{Im}(z))^2} = \int_A \frac{1}{(\operatorname{Im}(T(z)))^2} \cdot |J(T)| dx dy \\ &\stackrel{(1.2.2)}{=} \int_A \frac{|cz + d|^4}{(\operatorname{Im}(z))^2} \cdot \frac{1}{|cz + d|^4} dx dy = \mu(A).\end{aligned}$$

□

## 1.6 Winkel in $\mathbb{H}$

**Definition 1.6.1** Seien  $\gamma_1 : [c_1, d_1] \rightarrow \mathbb{H}$  und  $\gamma_2 : [c_2, d_2] \rightarrow \mathbb{H}$  zwei injektive differenzierbare Kurven in  $\mathbb{H}$ , die durch einen gemeinsamen Punkt  $z$  laufen. Der *hyperbolische Winkel* zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  in  $z$  ist der euklidische Winkel zwischen den Tangenten  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  zu diesen Kurven im Punkt  $z$ :

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2; z) := \angle_e(\zeta_1, \zeta_2; z).$$

**Satz 1.6.2** Die Transformationen aus  $T \in (\operatorname{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$  sind konform, d.h. sie sind orientierungserhaltend und sie erhalten die Winkel zwischen  $C^1$ -Kurven:

$$\angle(T(\gamma_1), T(\gamma_2); T(z)) = \angle(\gamma_1, \gamma_2; z).$$

## 1.7 Gauß-Bonnet Formel

Ein *hyperbolisches  $n$ -Eck* in  $\mathbb{H}$  ist eine abgeschlossene Menge, die von  $n$  hyperbolischen Segmenten der Form  $[z, w]$  begrenzt ist. Man betrachtet auch *hyperbolische  $n$ -Ecke* in der Erweiterung  $\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

**Satz 1.7.1** (Gauß-Bonnet) Sei  $\Delta$  ein hyperbolisches Dreieck in  $\overline{\mathbb{H}}$  mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . Dann gilt

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

*Beweis.* Sei  $\Delta = ABC$ .

*Fall 1.* Sei  $A, B \in \mathbb{H}$  und  $C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Da die Möbiustransformationen die Flächeninhalte und Winkel erhalten, kann angenommen werden, dass  $C = \infty$  ist.

Dann liegt die Seite  $AB$  auf einem Halbkreis  $K_{r_1, r_2}$ . Es kann angenommen werden, dass 0 das Zentrum von  $K_{r_1, r_2}$  ist. Sei  $R$  Radius dieses Halbkreises. Die Seiten  $AC$  und  $BC$  sind vertikale Strahlen. Seien  $a$  und  $b$  die  $x$ -Koordinaten dieser Strahlen. Dann gilt

$$\mu(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_a^b dx \int_{\sqrt{R^2 - x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

---

<sup>2</sup>In dem Fall ist  $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{y^2}$  und  $\varphi : (x, y) \mapsto (u, v)$ .

Nach Substitution  $x = R \cos \theta$  erhalten wir

$$\mu(\Delta) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta d\theta}{\sin \theta} = \pi - \alpha - \beta.$$

*Fall 2.* Sei  $A, B, C \in \mathbb{H}$ .

*Fall 3.* Sei  $A \in \mathbb{H}$  und  $B, C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

*Fall 4.* Sei  $A, B, C \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Diese Fälle können zu Fall 1 reduziert werden. □

## 1.8 Hyperbolische Trigonometrie

**Satz 1.8.1** Sei  $\Delta$  ein geodätes Dreieck mit endlichen hyperbolischen Längen der Seiten  $a, b, c$  und gegenüberliegenden Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ , die ungleich Null sind. Dann gilt:

$$(1) \quad \frac{\operatorname{sh} a}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin \gamma}. \quad (\text{Sinussatz})$$

$$(2) \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \gamma. \quad (\text{Erster Cosinussatz})$$

$$(3) \quad \operatorname{ch} c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}. \quad (\text{Zweiter Cosinussatz})$$

**Satz 1.8.2** Wenn zwei Dreiecke in  $\mathbb{H}$  gleiche Winkel haben, dann existiert eine Isometrie, die ein Dreieck nach dem anderen abbildet.

**Satz 1.8.3** (Pythagoras Satz für  $\mathbb{H}$ ) Ist  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , dann gilt

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b.$$

## 2 Fuchssche Gruppen

### 2.1 Klassifikation von Elementen aus $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

**Definition 2.1.1** Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ein Element der Gruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Die Zahl

$$\mathrm{Tr}(A) := a + d$$

heißt *Spur* von  $A$ .

- $A$  heißt *elliptisch*, falls  $|\mathrm{Tr}(A)| < 2$  ist.
- $A$  heißt *parabolisch*, falls  $|\mathrm{Tr}(A)| = 2$  ist.
- $A$  heißt *hyperbolisch*, falls  $|\mathrm{Tr}(A)| > 2$  ist.

Ein Element aus  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  heißt elliptisch, parabolisch, oder hyperbolisch, falls sein beliebiges Urbild in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  so ist.

**Lemma 2.1.2** Für jede Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  aus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  gilt:

- 1)  $A$  ist hyperbolisch genau dann, wenn  $A$  zwei verschiedene reelle Eigenwerte hat. In diesem Fall ist  $A$  zur Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq \pm 1,$$

in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  konjugiert.

- 2)  $A$  ist parabolisch genau dann, wenn  $A$  ein Eigenwert  $\lambda \in \{-1, 1\}$  der Vielfachheit 2 hat. In diesem Fall ist  $A$  der Matrix der Form

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \{0, 1\},$$

in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  konjugiert.

- 3)  $A$  ist elliptisch genau dann, wenn  $A$  zwei komplex-konjugierte Eigenwerte aus  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  hat. In diesem Fall ist  $A$  der Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  konjugiert.

**Definition 2.1.3** Das Element  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  operiert auf  $\mathbb{H}$  durch  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ . Seine *Fixpunktmenge* in  $\mathbb{H}$  ist

$$\mathrm{Fix}(A) := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid z = \frac{az+b}{cz+d} \right\}.$$

Auch operiert  $A$  auf der kompaktifizierten hyperbolischen Ebene  $\widehat{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ . Seine Fixpunktmenge in  $\widehat{\mathbb{H}}$  werden mit  $\widehat{\mathrm{Fix}}(A)$  bezeichnet.

**Satz 2.1.4** Sei  $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Dann gilt:

- 1) Ist  $A$  hyperbolisch, dann besteht  $\widehat{\text{Fix}}(A)$  aus zwei Punkten. Sie liegen in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Einer der Fixpunkte ist *abstoßend*, der andere ist *anziehend*.
- 2) Ist  $A$  parabolisch, dann besteht  $\widehat{\text{Fix}}(A)$  aus einem Punkt. Der liegt in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .
- 3) Ist  $A$  elliptisch, dann besteht  $\widehat{\text{Fix}}(A)$  aus einem Punkt. Der liegt in  $\mathbb{H}$ .

**Definition 2.1.5** Sei  $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  hyperbolisch. Die Geodäte in  $\mathbb{H}$ , die die zwei Fixpunkte von  $A$  verbindet, heißt *Achse* von  $A$  und wird mit  $\text{Achse}(A)$  bezeichnet.

**Bemerkung 2.1.6** Sei  $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  hyperbolisch. Da Möbiustransformationen Geodäten auf Geodäten abbilden (siehe Satz 1.4.2), und da nur eine Geodäte durch zwei gegebene Punkte läuft, bildet  $A$  die Achse( $A$ ) auf sich ab:

$$A(\text{Achse}(A)) = \text{Achse}(A).$$

**Bemerkung 2.1.7** Die Fixpunkte ermöglichen, Operationen der hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Transformationen qualitativ zu beschreiben.

**Bemerkung 2.1.8** Das Element  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  fixiert  $\infty$  genau dann, wenn  $c = 0$  ist. Wenn es so ist, dann hat die entsprechende Transformation  $\varphi_A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die Form  $z \mapsto a^2 z + ba$ . Dabei gilt:

- Ist  $a = \pm 1$ , dann ist  $A$  parabolisch.
- Ist  $a \neq \pm 1$ , dann ist  $A$  hyperbolisch mit  $\text{Fix}(A) = \{\infty, \frac{ba}{1-a^2}\}$ .

**Abschnitte 2.2 und 2.3 enthalten notwendige Informationen über topologische Räume und topologische Gruppen.**

## 2.2 Topologische Räume

**Definition 2.2.1 (Topologie, topologischer Raum, offene und abgeschlossene Mengen)**

Sei  $X$  eine Menge. Eine *Topologie* auf  $X$  ist eine Menge  $\mathfrak{T}$  von Teilmengen von  $X$  (jede solche Teilmenge heißt *offene Menge* in  $X$ ), die folgende Axiome erfüllt:

- (1) Die leere Menge  $\emptyset$  und  $X$  sind offen.
- (2) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist eine offene Menge.
- (3) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist eine offene Menge.

Eine Menge  $X$  zusammen mit einer Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $X$  heißt *topologischer Raum*  $(X, \mathfrak{T})$ . Man schreibt kurz  $X$ , wenn man  $\mathfrak{T}$  nicht beschreiben möchte. Eine Teilmenge  $U$  von  $X$  heißt *abgeschlossen*, falls  $X \setminus U$  offen ist.

**Definition 2.2.2 (Basis einer Topologie)**

Ein System  $B$  von Teilmengen eines topologischen Raumes  $(X, \mathfrak{T})$  heißt *Basis* der Topologie, wenn folgendes gilt:

- (1) Jede Menge aus  $B$  ist offen bez.  $\mathfrak{T}$  (mit anderen Worten gilt  $B \subseteq \mathfrak{T}$ ).
- (2) Jede offene Menge von  $X$  bez.  $\mathfrak{T}$  ist Vereinigung einiger Mengen aus  $B$ .

**Definition 2.2.3 (Umgebung)**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und sei  $x \in X$ . Eine Teilmenge  $U$  von  $X$  heißt *Umgebung* von  $x$ , wenn eine offene Menge  $\mathcal{O}$  mit  $x \in \mathcal{O} \subset U$  existiert.

**Definition 2.2.4 (stetige Abbildung)**

Seien  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$  und  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  zwei topologische Räume. Eine Abbildung  $f : X_1 \rightarrow X_2$  heißt *stetig*, wenn für jede offene Menge  $U$  in  $X_2$  ihr Urbild  $f^{-1}(U)$  offen in  $X_1$  ist.

**Definition 2.2.5 (induzierte Topologie und Faktortopologie)**

- (1) Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und sei  $Y$  eine Teilmenge von  $X$ . Wir definieren auf  $Y$  *induzierte Topologie*  $\mathfrak{T}_Y$  so: Eine Teilmenge  $S \subset Y$  wird als offen in  $Y$  deklariert, wenn eine offene Menge  $\mathcal{O}$  in  $X$  mit  $S = \mathcal{O} \cap Y$  existiert.
- (2) Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und sei  $Y$  eine Menge. Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Wir definieren auf  $Y$  die *Faktortopologie* so: Eine Teilmenge  $U \subset Y$  wird als offen in  $Y$  deklariert genau dann, wenn  $f^{-1}(U)$  offen in  $X$  ist.

Merken wir an: wenn  $Y$  die Faktortopologie besitzt, dann wird  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Die Faktortopologie auf  $Y$  ist die größte Topologie auf  $Y$ , für die  $f$  stetig ist.

**Definition 2.2.6 (diskreter Raum und diskrete Teilmenge)**

- (1) Ein topologischer Raum  $X$  mit der Topologie  $\mathfrak{T}$  heißt *diskret*, falls eine von zwei äquivalenten Aussagen gilt:
  - (a) für jeden Punkt  $x \in X$  ist die Menge  $\{x\}$  offen.
  - (b) Jede Teilmenge von  $X$  ist offen.
- (2) Eine Teilmenge  $X$  eines topologischen Raumes  $Y$  heißt *diskret*, wenn  $X$  mit der induzierten Topologie diskret ist. Das ist äquivalent dazu, dass es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine offene Menge  $\mathcal{O}_x$  in  $Y$  gibt, so dass  $\mathcal{O}_x \cap X = \{x\}$  ist.

**Definition 2.2.7 (Hausdorff-Raum)** Ein topologischer Raum  $(X, \mathfrak{T})$  heißt Hausdorff-Raum, wenn für je zwei verschiedene Punkte  $x_1$  und  $x_2$  in  $X$  offene Mengen  $\mathcal{O}_1$  und  $\mathcal{O}_2$  existieren, für die folgendes gilt:

$$x_1 \in \mathcal{O}_1, \quad x_2 \in \mathcal{O}_2 \quad \text{und} \quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset.$$

**Definition 2.2.8 (Erstes Abzählbarkeitsaxiom)** Ein topologischer Raum  $(X, \mathfrak{T})$  erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom (ist *erstabzählbar*), wenn folgendes gilt:

Für jeden Punkt  $x \in X$  gibt es eine höchstens abzählbare Menge von offenen Mengen  $U_1, U_2, \dots$  von  $x$ , so dass zu jeder Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $U_i$  mit  $U_i \subseteq U$  existiert.

### Bemerkung 2.2.9 (Stetigkeit und abzählbare Folgen)

- (1) Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum und sei  $(Y, \mathfrak{T}_Y)$  sein Unterraum mit induzierter Topologie. Dann gilt:
  - (i) Die identische Abbildung  $\text{id} : Y \rightarrow X$  ist stetig.
  - (ii) Ist  $(X, \mathfrak{T})$  erstabzählbar, dann ist  $(Y, \mathfrak{T}_Y)$  auch erstabzählbar.
  - (iii) Sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $Y$  und sei  $y \in Y$ . Dann gilt  $y_n \rightarrow y$  in  $(Y, \mathfrak{T}_Y)$  genau dann wenn  $y_n \rightarrow y$  in  $(X, \mathfrak{T})$  gilt.
- (2) Seien  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$  und  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  zwei topologische Räume. Sei  $f : X_1 \rightarrow X_2$  eine Abbildung. Dann folgt (b) aus (a), wobei gilt:
  - (a) Die Abbildung  $f$  ist stetig.
  - (b) Für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X_1$  und jedes  $x \in X_1$  gilt: Ist  $x_n \rightarrow x$  in  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$ , dann ist  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  in  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$ .

Ist  $(X, \mathfrak{T})$  erstabzählbar, dann sind (a) und (b) äquivalent.

**Bemerkung 2.2.10 (Kriterium der Diskretheit)** Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein erstabzählbarer topologischer Raum. Dann ist der Raum diskret genau dann, wenn für jeden Punkt  $x$  und jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \rightarrow x$  folgendes gilt:  $x_n = x$  für alle groß genug  $n$ .

### Definition 2.2.11 (Kompakte Räume und kompakte Teilmengen)

- (1) Ein topologischer Raum  $(X, \mathfrak{T})$  heißt *kompakt*, wenn für jede Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  mit  $U_i \in \mathfrak{T}$  eine endliche Teilmenge  $I_0 \subseteq I$  mit  $X = \bigcup_{i \in I_0} U_i$  existiert.
- (2) Eine Teilmenge  $Y$  eines topologischen Raums  $(X, \mathfrak{T})$  heißt *kompakt*, wenn eine der zwei äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:
  - (a)  $(Y, \mathfrak{T}_Y)$  ist ein kompakter Raum.
  - (b) Für jede Überdeckung  $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$  mit  $U_i \in \mathfrak{T}$  eine endliche Teilmenge  $I_0 \subset I$  mit  $Y \subseteq \bigcup_{i \in I_0} U_i$  existiert.

### Bemerkung 2.2.12 (Kompaktheit für metrische Räume)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Für  $r > 0$  und  $x \in X$  heißt

$$B_r(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$$

*offene Kugel* mit Radius  $r$  und Zentrum  $x$ . Eine Teilmenge  $Y$  in  $X$  heißt *beschränkt*, wenn  $Y$  in einer der offenen Kugeln liegt.

Wir definieren Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $X$  so, dass die Menge  $\{B_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$  Basis von  $\mathfrak{T}$  ist. Dann gilt:

- (1) Der topologische Raum  $(X, \mathfrak{T})$  ist Hausdorffsch und erstabzählbar.
- (2) Eine Teilmenge  $Y$  in  $\mathbb{R}^n$  ist kompakt genau dann, wenn  $Y$  abgeschlossen und beschränkt ist.

**Lemma 2.2.13** Jede diskrete und abgeschlossene Teilmenge  $M$  eines kompakten topologischen Raumes  $X$  ist endlich.

*Beweis.* Für jedes  $m \in M$  sei  $O(m)$  eine Umgebung von  $m$  in  $X$  mit  $O(m) \cap M = \{m\}$ . Dann ist

$$X = (X \setminus M) \cup \left( \bigcup_{m \in M} O(m) \right)$$

eine Überlagerung von  $X$  mit offenen Mengen. Da  $X$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge  $M_0 \subseteq M$  mit

$$X = (X \setminus M) \cup \left( \bigcup_{m \in M_0} O(m) \right).$$

Dann gilt

$$M = \left( \bigcup_{m \in M_0} O(m) \right) \cap M = \bigcup_{m \in M_0} (O(m) \cap M) = M_0.$$

□

**Definition 2.2.14 (Produkttopologie)**

Seien  $(X_1, \mathfrak{T}_1)$  und  $(X_2, \mathfrak{T}_2)$  zwei topologische Räume. Die *Produkttopologie*  $\mathfrak{T}$  auf  $X_1 \times X_2$  besteht aus allen möglichen Vereinigungen der Mengen der Form  $U \times V$ , wobei  $U \in \mathfrak{T}_1$  und  $V \in \mathfrak{T}_2$  ist.

**Bemerkung 2.2.15** Die Produkttopologie ist die größte Topologie auf  $X_1 \times X_2$ , für die die Projektionen  $\text{pr}_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$  und  $\text{pr}_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$  stetig sind.

## 2.3 Topologische Gruppen

**Definition 2.3.1** Eine Gruppe  $G$ , die gleichzeitig ein topologischer Raum ist, heißt *topologische Gruppe*, falls die Abbildungen  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, y) \mapsto xy$  und  $^{-1} : G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto x^{-1}$  stetig sind.

**Definition 2.3.2** Eine Untergruppe  $H$  einer topologischen Gruppe  $G$  heißt *diskret* in  $G$ , falls  $H$  diskret als Teilmenge des topologischen Raumes  $G$  ist.

**Beispiel 2.3.3** Wir betrachten  $[0, 1]$  als topologischen Raum mit der Topologie, die von kanonischer Topologie auf  $\mathbb{R}$  induziert ist. Der Raum ist Hausdorffsch und kompakt. Die Teilmenge  $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  des topologischen Raumes  $[0, 1]$  ist diskret, aber nicht abgeschlossen.

**Satz 2.3.4** Jede diskrete Untergruppe  $H$  einer Hausdorffschen topologischen Gruppe  $G$  ist abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $h_1, h_2, \dots$  eine Folge von Elementen aus  $H$ , die gegen ein  $g \in G$  konvergiert. Wir müssen zeigen, dass  $g$  in  $H$  liegt.

Es ist klar, dass die Folge  $h_1 g^{-1}, h_2 g^{-1}, \dots$  gegen 1 konvergiert. Dann gilt: Für jede Umgebung  $U$  von 1 existiert eine natürliche Zahl  $n_0 = n_0(U)$ , so dass  $h_n g^{-1} \in U$  für alle  $n \geq n_0$  ist.

Sei  $V$  eine beliebige Umgebung von 1. Dann existiert eine Umgebung  $U$  von 1 mit  $U \cdot U^{-1} \subseteq V$  (Aufgabe). Dann gilt  $h_k g^{-1} \cdot (h_l g^{-1})^{-1} = h_k h_l^{-1} \in V$  für alle  $k, l \geq n_0$ .



Da  $1 \in H$  ist und  $H$  diskret in  $G$  ist, existiert eine Umgebung  $V$  von  $1$ , so dass  $V \cap H = \{1\}$  ist. Dann gilt  $h_k h_l^{-1} = 1$  für alle  $k, l \geq n_0$ . Also gilt  $h_k = h_l$  für alle  $k, l \geq n_0$ . Wir bezeichnen dieses Element mit  $h$ . Dann ist  $h \in H$  und die Folge  $h_1, h_2, \dots$  konvergiert gegen  $h$ . In jedem Hausdorffschen Raum ist aber der Limes einer Folge eindeutig. Deswegen gilt  $g = h \in H$ .  $\square$

**Folgerung 2.3.5** Jede diskrete Untergruppe  $H$  einer Hausdorffschen kompakten topologischen Gruppe  $G$  ist endlich.

*Beweis.* Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 2.3.4 und Lemma 2.2.13.  $\square$

**Folgerung 2.3.6** Jede diskrete Untergruppe der orthogonalen Gruppe  $O(n)$  ist endlich.

**Bemerkung 2.3.7 (Kriterium der Diskretheit einer topologischen Gruppe)** Sei  $G$  eine topologische Gruppe mit erstabzählbarer Topologie. Dann gilt:

Eine Untergruppe  $H$  von  $G$  ist diskret in  $G$  genau dann, wenn aus  $h_n \rightarrow e$  (wobei  $h_n \in H$  ist und  $e$  das neutrale Element ist) folgt, dass  $h_n = e$  für alle groß genug  $n$  ist.

## 2.4 Fuchssche Gruppen

**Definition 2.4.1 (Topologie auf  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ )**

Wir identifizieren  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  mit einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^4$  durch

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)$$

Dadurch werden eine *Norm* und eine *Metrik* auf  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  definiert:

$$\|A\| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

$$d(A, B) := \|A - B\|.$$

Mit dieser Metrik ist  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ein topologischer Raum. Mit Hilfe des Epimorphismus

$$\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

ist Faktortopologie auf  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  definiert. Die *Konvergenz* in dieser Topologie wird folgendermaßen ausgedrückt: in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  gilt

$$g_n \rightarrow g$$

genau dann, wenn Matrizen  $A_n$  in  $\varphi^{-1}(g_n)$  und  $A$  in  $\varphi^{-1}(g)$  existieren, für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

gilt.

**Bemerkung 2.4.2** Die topologische Gruppe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  ist Hausdorffsch und erstabzählbar.

**Definition 2.4.3 (erste Definition der Fuchsschen Gruppen)**

Eine *Fuchssche Gruppe* ist eine diskrete Untergruppe von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ .

Da  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  erstabzählbar ist, ist diese Definition der folgenden äquivalent.

**Definition 2.4.4 (zweite Definition der Fuchsschen Gruppen)**

Eine Untergruppe  $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  heißt Fuchssche Gruppe, falls aus  $g_n \rightarrow e$  (wobei  $g_n \in G$  ist und  $e$  das neutrale Element ist) folgt, dass  $g_n = e$  für alle groß genug  $n$  gilt.

## 2.5 Total unzusammenhängende Operierungen von Gruppen

Sei  $X$  ein metrischer Raum und sei  $G \leq \text{Isom}(X)$ .

**Definition 2.5.1**  $G$  operiert *total unzusammenhängend* auf  $X$  (abkürzt TUH), falls für jeden Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  existiert, so dass

$$g(V) \cap V \neq \emptyset \text{ für nur endlich viele } g \in G \text{ gilt.} \quad (2.2.1)$$

**Lemma 2.5.2**  $G$  operiert total unzusammenhängend auf  $X$  genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) für jedes  $x \in X$  besitzt der Orbit  $G(x)$  keinen Häufungspunkt<sup>3</sup> in  $X$ ;
- (2) für jedes  $x \in X$  ist der Stabilisator  $G_x := \{g \in G \mid g(x) = x\}$  endlich.

*Beweis.* (1) & (2)  $\Rightarrow$  (TUH):

Sei  $x \in X$ . Aus (1) folgt: Es existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$\mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap G(x) = \{x\}.$$

Wir behaupten, dass  $V := \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(x)$  die Bedingung (2.2.1) erfüllt. In der Tat, für  $g \in G$  mit

$$g(\mathcal{O}_{\varepsilon/2}(x)) \cap \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(x) \neq \emptyset \quad (2.2.2)$$

gilt  $\text{dist}(x, g(x)) < \varepsilon$  und somit gilt

$$g(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(x) \cap G(x) = \{x\}.$$

Deswegen gilt  $g \in G_x$ . Nach (2) ist  $G_x$  endlich. So existieren nur endlich viele  $g$ , die (2.2.2) erfüllen und wir haben (TUH) bewiesen.

$\neg(2) \Rightarrow \neg(\text{TUH})$  ist offensichtlich.

$\neg(1) \Rightarrow \neg(\text{TUH})$ :

Aus  $\neg(1)$  folgt: Es existiert  $x \in X$ , so dass  $G(x)$  einen Häufungspunkt  $y$  hat. Dann existieren verschiedene  $g_i \in G$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , mit  $g_i(x) \in \mathcal{O}_{1/i}(y) \setminus \{y\}$ . Insbesondere gilt

$$g_i^{-1}(\mathcal{O}_{1/i}(y)) \cap g_j^{-1}(\mathcal{O}_{1/j}(y)) \neq \emptyset$$

für alle  $i, j$ . Für  $j \geq i$  gilt

$$g_j g_i^{-1}(\mathcal{O}_{1/i}(y)) \cap \mathcal{O}_{1/i}(y) \neq \emptyset.$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir nehmen  $i_0 \in \mathbb{N}$  mit  $1/i_0 < \varepsilon$ . Dann gilt

$$g_j g_{i_0}^{-1}(\mathcal{O}_\varepsilon(y)) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(y) \neq \emptyset.$$

für alle  $j \geq i_0$ . Daraus folgt  $\neg(\text{TUH})$ . □

<sup>3</sup>Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $S \subseteq X$  eine Teilmenge. Ein Punkt  $y \in X$  heißt *Häufungspunkt* der Menge  $S$ , falls jede Umgebung  $V$  von  $y$  einen Punkt aus  $S \setminus \{y\}$  besitzt.

**Lemma 2.5.3** Sei  $z_0 \in \mathbb{H}$  und sei  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{H}$ . Dann ist die Menge

$$M := \{T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid T(z_0) \in K\}$$

kompakt.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass  $M$  (als Teilmenge von  $\mathbb{R}^4$ ) abgeschlossen und beschränkt ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{H}, \\ T &\mapsto T(z_0). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$M = \{T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid \psi(T) \in K\} = \psi^{-1}(K).$$

Da  $\psi$  stetig ist und  $K$  abgeschlossen ist, ist auch  $M$  abgeschlossen.

*Jetzt beweisen wir, dass  $M$  beschränkt ist:*

- a) Da  $K$  beschränkt ist, existiert eine Konstante  $C_1 > 0$ , so dass  $|z| < C_1$  für alle  $z \in K$  gilt. Dann gilt

$$\left| \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \right| < C_1 \tag{2.2.3}$$

für alle  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  aus  $M$ .

- b) Da  $K$  beschränkt ist, existiert eine Konstante  $C_2$ , so dass

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}\right) \geq C_2$$

ist. Nach (1.2.2) gilt

$$\frac{\mathrm{Im}(z_0)}{|cz_0 + d|^2} \geq C_2.$$

Daraus folgt

$$|cz_0 + d| \leq \sqrt{\frac{\mathrm{Im}(z_0)}{C_2}}. \tag{2.2.4}$$

Daraus und aus (2.2.3) folgt

$$|az_0 + b| \leq C_1 \sqrt{\frac{\mathrm{Im}(z_0)}{C_2}}. \tag{2.2.5}$$

Aus (2.2.4) und (2.2.5) folgt, dass  $a, b, c, d$  beschränkt sind.  $\square$

**Satz 2.5.4** Eine Untergruppe  $G$  von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  ist Fuchssch genau dann, wenn sie total unzusammenhängend auf  $\mathbb{H}$  operiert.

*Beweis.* Angesichts des kanonischen Epimorphismus  $\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  gilt:

- $G$  ist diskret in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  genau dann, wenn  $\psi^{-1}(G)$  diskret in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ist.
- $G$  operiert total unzusammenhängend auf  $\mathbb{H}$  genau dann, wenn  $\psi^{-1}(G)$  total unzusammenhängend auf  $\mathbb{H}$  operiert.

Deswegen genügt es, die folgende Behauptung zu beweisen:

*Eine Untergruppe  $G$  von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ist diskret genau dann, wenn sie total unzusammenhängend auf  $\mathbb{H}$  operiert.*

1) Sei  $G$  diskret in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Angenommen, dass (2.2.1) nicht gilt. Dann existiert  $z_0 \in \mathbb{H}$  und eine  $\epsilon$ -Umgebung  $V := \mathcal{O}_\epsilon(z_0)$ , so dass für

$$G_0 := \{g \in G \mid g(V) \cap V \neq \emptyset\}$$

$|G_0| = \infty$  gilt. Wir setzen  $K := \overline{\mathcal{O}_{2\epsilon}(z_0)}$ . Dann gilt  $g(z_0) \in K$  für alle  $g \in G_0$ . Deswegen gilt

$$G_0 \subseteq \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid g(z_0) \in K\} \cap G.$$

- Die Menge  $\{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid g(z_0) \in K\}$  ist kompakt (siehe Lemma 2.5.3).
- Da  $G$  diskret in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ist, ist  $G$  abgeschlossen (siehe Lemma 2.3.4).
- Der Schnitt einer kompakten Menge und einer diskreten und abgeschlossenen Menge ist endlich (siehe Lemma 2.2.13).

Also ist  $G_0$  endlich. Ein Widerspruch.

2) Sei  $G$  nicht diskret in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Dann existiert eine unendliche Folge  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von verschiedenen und nichttrivialen Elementen aus  $G$ , so dass  $g_k \rightarrow e$  ist. Jedes Element aus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  fixiert maximal einen Punkt in  $\mathbb{H}$ . Sei  $z_0 \in \mathbb{H}$  ein Punkt, der von keinem  $g_k$  fixiert ist. Dann gilt:

- $g_k(z_0) \neq z_0$  für alle  $k$ ,
- $g_k(z_0) \rightarrow z_0$ .

Dann ist  $z_0$  ein Häufungspunkt von  $G(z_0)$ . Nach Lemma 2.5.2 operiert  $G$  nicht total unzusammenhängend auf  $\mathbb{H}$ .  $\square$

**Folgerung 2.5.5** (*Kriterium für Fuchssche Gruppen*) Eine Untergruppe  $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  ist Fuchssch genau dann, wenn für jeden Punkt  $z \in \mathbb{H}$  sein Orbit  $G(z)$  keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{H}$  hat.

*Beweis.*  $(\Rightarrow)$  folgt aus dem Satz 2.5.4 und dem Lemma 2.5.2.

$(\Leftarrow)$  Nehmen wir an, dass  $G$  nicht diskret ist. Wie im Beweis des Satzes 2.5.4 kann man eine Folge  $(g_k(z_0))_{k \in \mathbb{N}}$  konstruieren, für die gilt:

- $g_k(z_0) \neq z_0$  für alle  $k$ ,
- $g_k(z_0) \rightarrow z_0$ .

Dann hat der Orbit  $G(z_0)$  einen Häufungspunkt.  $\square$

**Definition 2.5.6** Sei  $G \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  eine Fuchssche Gruppe. Die Menge aller Häufungspunkte aller Orbits  $G(z)$ ,  $z \in \mathbb{H}$ , heißt *Limesmenge* der Gruppe  $G$  und wird mit  $\Lambda(G)$  bezeichnet. Kurz:

$$\Lambda(G) = \bigcup_{z \in \mathbb{H}} \text{HP}(G(z)).$$

**Lemma 2.5.7** Sei  $G$  eine Fuchssche Gruppe. Dann gelten:

- (1)  $\Lambda(G) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,
- (2)  $G(\Lambda(G)) = \Lambda(G)$ .

*Beweis.* (1) folgt aus Folgerung 2.5.5, (2) aus der Definition. □

**Beispiele.**

1) Für  $G = \langle A \rangle$  mit  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$  gilt  $\Lambda(G) = \{0, \infty\}$ .

2) Für  $G = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  gilt  $\Lambda(G) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Das ist eine schwere Aufgabe.

**Folgerung 2.5.8** Für jede Fuchssche Gruppe  $G$  hat die Menge der Fixpunkte ihrer elliptischen Elemente keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{H}$ . Mit anderen Worten hat die Menge

$$\{z \in \mathbb{H} \mid g(z) = z \text{ für einen nichttrivialen } g \in G\}$$

keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{H}$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt leicht aus Satz 2.5.4 und Definition 2.5.1. □

## 2.6 Algebraische Eigenschaften der Fuchsschen Gruppen

Sei  $G$  eine Gruppe und sei  $g \in G$ . Der Zentralisator von  $g$  in  $G$  ist die Untergruppe

$$C_G(g) := \{h \in G \mid hg = gh\}$$

**Lemma 2.6.1** Seien  $T, S$  zwei nichttrivialen Elemente in  $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$ . Ist  $TS = ST$ , dann ist  $S(\widehat{\text{Fix}}(T)) = \widehat{\text{Fix}}(T)$ .

**Satz 2.6.2** Seien  $T, S$  zwei nichttrivialen Elemente in  $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$ . Dann gilt

$$TS = ST \Leftrightarrow \widehat{\text{Fix}}(T) = \widehat{\text{Fix}}(S).$$

**Folgerung 2.6.3** Zentralisator in  $\text{Möb}_{\mathbb{R}}$  eines hyperbolischen, parabolischen, elliptischen Elements besteht aus  $\text{id}$  und allen hyperbolischen, parabolischen, elliptischen Elementen (entsprechend), die gleiche Fixpunktmenge haben.

**Folgerung 2.6.4** Zwei hyperbolische Elemente kommutieren genau dann, wenn sie die gleiche Achse haben.

**Satz 2.6.5** Sei  $G$  eine Fuchssche Gruppe. Wenn alle nichttrivialen Elemente von  $G$  gleiche Fixpunkte haben, dann ist  $G$  zyklisch.

**Satz 2.6.6** Jede abelsche Fuchssche Gruppe ist zyklisch.

**Folgerung 2.6.7** Keine Fuchssche Gruppe ist der Gruppe  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  isomorph.

**Definition 2.6.8** Sei  $G$  eine Gruppe und sei  $H \leq G$  ihre Untergruppe. Der Normalisator von  $H$  in  $G$  ist die Untergruppe

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

**Satz 2.6.9** Sei  $G$  eine Fuchssche Gruppe. Ist  $G$  nicht abelsch, dann ist  $N_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(G)$  auch Fuchssch.

## 2.7 Elementare Fuchssche Gruppen

**Definition 2.7.1** Eine Untergruppe  $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  heißt *elementar*, wenn ein endlicher  $G$ -Orbit in  $\widehat{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$  existiert.

**Bemerkung 2.7.2**  $\mathbb{H}$  und  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  sind  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -invariant. Deswegen liegt der  $G$ -Orbit eines Punktes  $z \in \widehat{\mathbb{H}}$  entweder in  $\mathbb{H}$  oder in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

**Satz 2.7.3** Sei  $G$  eine Untergruppe in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ , so dass alle nichttrivialen Elemente von  $G$  elliptisch sind. Dann haben alle Elemente von  $G$  einen gemeinsamen Fixpunkt in  $\widehat{\mathbb{H}}$ . Insbesondere  $G$  ist abelsch und elementar.

*Beweis.* Sei  $A$  ein Element in  $G \setminus \{e\}$ . Nach einer passenden Konjugation gilt

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ein beliebiges Element  $B \in G$  hat die Form

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit  $\det(B) = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) &= 2ad \cos^2(\theta) + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \sin^2(\theta) - 2bc \cos^2(\theta) \\ &= 2 \cos^2(\theta) + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \sin^2(\theta) \\ &= 2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2) \sin^2(\theta) \\ &= 2 + ((a - d)^2 + (b + c)^2) \sin^2(\theta) \geq 2. \end{aligned}$$

Deswegen ist der Kommutator  $[A, B]$  nicht elliptisch. Also ist  $[A, B] = 1$ . Wir haben somit gezeigt, dass die Fuchssche Gruppe  $G$  abelsch ist. Nach Satz 2.6.2 haben alle Elemente von  $G$  einen gemeinsamen Fixpunkt in  $\widehat{\mathbb{H}}$ .  $\square$

**Folgerung 2.7.4** Jede Fuchssche Gruppe, deren nichttriviale Elemente elliptisch sind, ist eine endliche zyklische Gruppe.

*Beweis.* Der Beweis folgt aus den Sätzen 2.6.6 und 2.7.3.  $\square$

**Satz 2.7.5** Jede elementare Fuchssche Gruppe  $G$  ist entweder zyklisch, oder es existiert eine reelle Zahl  $k > 1$ , so dass  $G$  und  $H_k := \langle \theta_k, \psi \rangle$  konjugiert sind. Hier ist

$$\theta_k : z \mapsto kz, \quad \psi : z \mapsto -\frac{1}{z}.$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{O}$  ein endlicher Orbit von  $G$  in  $\widehat{\mathbb{H}}$ .

*Fall 1.* Sei  $|\mathcal{O}| = 1$ .

Dann ist  $\mathcal{O} = \{\alpha\}$  für ein  $\alpha \in \widehat{\text{Fix}}(G)$ .

Fall 1.1. Sei  $\alpha \in \mathbb{H}$ .

Dann sind alle Elemente von  $G \setminus \{e\}$  elliptisch. Nach Folgerung 2.7.4 ist  $G$  eine endliche zyklische Gruppe.

Fall 1.2. Sei  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Dann besitzt  $G$  kein elliptisches Element. Dann sind drei Fälle zu betrachten:

(a)  $G$  enthält ein hyperbolisches Element und ein parabolisches Element.

Nach einer passenden Konjugation wird  $G$  das Element  $g : z \mapsto \lambda z$  mit  $\lambda > 0$  enthalten. Wir haben  $\alpha \in \widehat{\text{Fix}}(G) \subseteq \widehat{\text{Fix}}(g) = \{0, \infty\}$ . Deswegen gilt  $\alpha = 0$  oder  $\alpha = \infty$ .

Falls  $\alpha = 0$  ist, betrachten wir  $\psi G \psi^{-1}$  statt  $G$  (zu Erinnerung:  $\psi : z \mapsto -\frac{1}{z}$ ).

Wir haben:

- $\widehat{\text{Fix}}(\psi G \psi^{-1}) = \psi(\widehat{\text{Fix}}(G)) = \psi(\alpha) = \{\infty\}$ .
- $g = \psi g^{-1} \psi^{-1} \in \psi G \psi^{-1}$ .

Deswegen können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\alpha = \infty$  ist. Wenn es nötig ist, können wir  $g$  nach  $g^{-1}$  ersetzen und o.B.d.A. annehmen, dass  $\lambda > 1$  ist. Sei  $h$  ein parabolisches Element aus  $G$ . Wegen  $\alpha \in \widehat{\text{Fix}}(G) \subseteq \widehat{\text{Fix}}(h)$  gilt  $\{\infty\} = \widehat{\text{Fix}}(h)$ . Dann ist  $h : z \mapsto z + b$  für ein  $b \in \mathbb{R}$ . Wir haben

$$g^{-n} h g^n(z) = z + \lambda^{-n} b.$$

Da  $\lambda > 0$  ist, ist

$$g^{-n} h g^n \rightarrow \text{id},$$

was der Diskretheit von  $G$  widerspricht.

(b)  $G \setminus \{e\}$  enthält nur parabolische Elemente.

Dann haben sie nur  $\alpha$  als einen Fixpunkt. Aus dem Satz 2.6.5 folgt  $G \cong \mathbb{Z}$ .

(c)  $G \setminus \{e\}$  enthält nur hyperbolische Elemente.

Wie oben, o.B.d.A. können wir annehmen, dass  $g : z \mapsto \lambda z$  ( $\lambda \neq 1$ ) in  $G$  liegt und  $\alpha = \infty$  ist. Wenn  $\langle g \rangle = G$  ist, dann sind wir fertig.

Wenn  $\langle g \rangle \neq G$  ist, dann betrachten wir ein  $h \in G \setminus \langle g \rangle$ . Wegen  $\alpha \in \widehat{\text{Fix}}(h)$  gilt  $h : z \mapsto az + b$  mit  $a \neq 0$ . Wir haben  $ghg^{-1}h^{-1} : z \mapsto z + (\lambda - 1)b$ . Wenn  $b \neq 0$  ist, dann ist dieses Element parabolisch, was der Annahme widerspricht. Wenn  $b = 0$  ist, dann gilt  $h : z \mapsto az$ . Also haben alle Elemente von  $G$  die Form  $z \mapsto kz$ . Dann ist  $G$ , bis zur Isomorphie, eine diskrete Untergruppe von  $\mathbb{R}_+^*$ . Dann ist  $G \cong \mathbb{Z}$ .

*Fall 2.* Sei  $|\mathcal{O}| = 2$ , also sei  $\mathcal{O} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ .

Fall 2.1.  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{H}$ .

Dann enthält  $G$  nur elliptische Elemente. Nach Folgerung 2.7.4 ist  $G$  eine endliche zyklische Gruppe.

Fall 2.2.  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Dann besitzt  $G$  kein parabolisches Element. (In der Tat: Jedes parabolische Element hat nur einen endlichen Orbit in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Dieser Orbit besteht aus einem Fixpunkt.) Wir betrachten drei Fälle:

- (a)  $G \setminus \{e\}$  besitzt nur hyperbolische Elemente. Dann sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ihre gemeinsamen Fixpunkte und  $\{\alpha_1\}$  ist ein Orbit für  $G$ . Ein Widerspruch.
- (b)  $G \setminus \{e\}$  besitzt nur elliptische Elemente. Nach Folgerung 2.7.4 ist  $G$  eine endliche zyklische Gruppe.
- (c)  $G \setminus \{e\}$  besitzt sowohl elliptische als auch hyperbolische Elemente. Dann haben elliptische Elemente die Ordnung 2 und permutieren  $\alpha_1, \alpha_2$ . Nach einer Konjugation können wir annehmen, dass  $\alpha_1 = 0$  und  $\alpha_2 = \infty$  ist. Dann haben alle hyperbolischen Elemente in  $G$  die Gestalt

$$g_k : z \mapsto kz \quad k > 0, k \neq 1.$$

und alle elliptischen Elemente in  $G$  die Gestalt

$$e_\lambda : z \mapsto -\frac{\lambda}{z}, \quad \lambda > 0.$$

Sei  $G_0$  die Untergruppe von  $G$ , die aus  $\text{id}$  und allen hyperbolischen Elementen von  $G$  besteht. Dann hat  $G_0$  den Index 2 in  $G$ . Die zweite Nebenklasse besteht aus elliptischen Elementen. Sei  $e_\lambda$  eines von diesen. Wir konjugieren  $G$  noch einmal mit

$$q : z \mapsto \sqrt{\lambda}z.$$

Dann gelten  $qG_0q^{-1} = G_0$  und  $qe_\lambda q^{-1} = e_1 = \psi$ . Deswegen gilt für die neue  $G$ :

$$G = G_0 \cup \psi G_0.$$

Da  $G_0$  diskret ist, ist  $G_0 = \langle g_k \rangle$  für ein  $k > 0, k \neq 1$ . Somit ist  $G = H_k$ .

*Fall 3.* Sei  $|\mathcal{O}| \geq 3$ .

Dann ist  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $G \setminus \{e\}$  besitzt nur elliptische Elemente. Nach Folgerung 2.7.4 ist  $G$  eine endliche zyklische Gruppe.  $\square$



## 2.8 Ungleichung von Jorgensen

**Lemma 2.8.1** Seien  $S, T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Wir setzen  $S_0 := S$ ,  $S_1 := S_0 T S_0^{-1}$  und  $S_{r+1} = S_r T S_r^{-1}$  für  $r \geq 1$ . Wenn ein  $n \geq 1$  mit  $S_n = T$  existiert, dann ist  $\langle S, T \rangle$  elementar und  $S_2 = T$ .

*Beweis.* Für  $T = \mathrm{Id}$  ist die Behauptung offensichtlich. Sei  $T \neq \mathrm{Id}$ .

*Fall 1.* Sei  $|\widehat{\mathrm{Fix}}(T)| = 1$ .

Dann ist  $\widehat{\mathrm{Fix}}(T) = \{\alpha\}$  für ein  $\alpha \in \widehat{\mathbb{H}}$ . Da  $S_{r+1} \sim T$  ist, gilt auch  $|\widehat{\mathrm{Fix}}(S_{r+1})| = 1$  für alle  $r \geq 0$ . Außerdem gilt

$$S_{r+1} \circ S_r(\alpha) = S_r \circ T \circ S_r^{-1} \circ S_r(\alpha) = S_r(\alpha).$$

Daraus folgt  $\widehat{\mathrm{Fix}}(S_{r+1}) = \{S_r(\alpha)\}$ . Deshalb gilt:

$$\text{Ist } \alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}(S_{r+1}), \text{ dann ist auch } \alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}(S_r).$$

Da  $S_n = T$  ist, gilt  $\widehat{\mathrm{Fix}}(S_n) = \{\alpha\}$ . Daraus folgt  $\alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}(S_0)$ . Also gilt:

- $\alpha \in \widehat{\mathrm{Fix}}\langle S, T \rangle$ . Deswegen ist  $\langle S, T \rangle$  elementar.
- $\widehat{\mathrm{Fix}}(S_1) = \{\alpha\} = \widehat{\mathrm{Fix}}(T)$ . Daraus folgt  $S_1 T = T S_1$ . Deswegen gilt  $S_2 = T$ .

*Fall 2.* Sei  $|\widehat{\mathrm{Fix}}(T)| = 2$ .

Dann ist  $\widehat{\mathrm{Fix}}(T) = \{\alpha, \beta\}$  für einige  $\alpha, \beta \in \widehat{\mathbb{H}}$ . Da  $S_{r+1} \sim T$  ist, gilt  $|\widehat{\mathrm{Fix}}(S_{r+1})| = 2$  und  $S_{r+1}$  ist hyperbolisch für alle  $r \geq 0$ . Außerdem gilt:

$$S_{r+1} \circ S_r(\{\alpha, \beta\}) = S_r \circ T \circ S_r^{-1} \circ S_r(\{\alpha, \beta\}) = S_r(\{\alpha, \beta\}).$$

Wie jedes hyperbolische Element besitzt  $S_{r+1}$  eine einzige 2-elementige invariante Menge in  $\widehat{\mathbb{H}}$ ; sie besteht aus zwei Fixpunkten von  $S_{r+1}$ . Deshalb gilt für  $r \geq 0$ :

$$\text{Ist } \{\alpha, \beta\} \text{ } S_{r+1}\text{-invariant, dann ist } \{\alpha, \beta\} \text{ } S_r\text{-invariant.}$$

Da  $S_n = T$  ist, ist  $\{\alpha, \beta\}$   $S_n$ -invariant. Daraus folgt, dass  $\{\alpha, \beta\}$   $S_0$ -invariant ist. Also gilt:

- $\{\alpha, \beta\}$  ist eine  $\langle S, T \rangle$ -invariante Menge. Deswegen ist  $\langle S, T \rangle$  elementar.
- Da  $S_1$  und  $T$  zwei hyperbolische Elemente mit gleichen Fixpunktmenge sind, gilt  $S_1 T = T S_1$ . Deswegen gilt  $S_2 = T$ .

**Satz 2.8.2** (Jorgensen-Ungleichung) Seien  $T, S \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ , so dass  $\langle T, S \rangle$  eine nicht elementare Fuchsische Gruppe ist. Dann gilt:

$$|\mathrm{Tr}^2(T) - 4| + |\mathrm{Tr}(T S T^{-1} S^{-1}) - 2| \geq 1. \quad (2.8.1)$$

*Beweis.* Wir definieren  $S_0, S_1, \dots$  wie im Lemma 2.8.1. Wir werden zeigen: Wenn die Jorgensen-Ungleichung nicht erfüllt ist, dann wird

$$S_n = T \tag{2.8.2}$$

für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Nach Lemma 2.8.1 wird dann die Gruppe  $\langle S, T \rangle$  elementar und wir erhalten einen Widerspruch.

*Fall 1.* Sei  $T$  parabolisch.

Da die Spur bezüglich der Konjugation invariant ist, können wir folgendes annehmen:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Angenommen, dass die Ungleichung (2.8.1) nicht stimmt. Dann ist  $|c| < 1$  (siehe Aufgabe 4 im Übungsblatt 5). Sei

$$S_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}.$$

Aus  $S_{n+1} = S_n \circ T \circ S_n^{-1}$  folgt

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a_n c_n & a_n^2 \\ -c_n^2 & 1 + a_n c_n \end{bmatrix}$$

Nach Induktion erhalten wir  $c_{n+1} = -c^{2n}$ . Da  $|c| < 1$  ist, ist

$$c_n \rightarrow 0.$$

Dann haben wir  $|a_n| \leq 1 + |a_{n-1}| \leq \dots \leq n + |a|$ . Deswegen gilt  $|a_n c_n| \leq (n + |a|)|c|^{2n} \rightarrow 0$ . Daraus folgt

$$a_{n+1} = 1 - a_n c_n \rightarrow 1.$$

Also gilt  $S_{n+1} \rightarrow T$ . Da  $\langle S, T \rangle$  diskret ist, wird die Gleichung (2.8.2) für groß genug  $n$  erfüllen.

*Fall 2.* Sei  $T$  hyperbolisch.

Nach einer passenden Konjugation können wir annehmen:

$$T = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{bmatrix} \quad (u > 1), \quad S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Wir bezeichnen

$$\mu := |\mathrm{Tr}^2(T) - 4| + |\mathrm{Tr}(TST^{-1}S^{-1}) - 2|$$

Angenommen, dass die Ungleichung (2.8.1) nicht stimmt. Dann gilt

$$\mu = (1 + |bc|) \left| u - \frac{1}{u} \right|^2 < 1. \tag{2.8.3}$$

Aus  $S_{n+1} = S_n \circ T \circ S_n^{-1}$  folgt

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n d_n u - \frac{b_n c_n}{u} & a_n b_n \left( \frac{1}{u} - u \right) \\ c_n d_n \left( u - \frac{1}{u} \right) & \frac{a_n d_n}{u} - b_n c_n u \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt  $b_{n+1}c_{n+1} = -b_n c_n (1 + b_n c_n) \left( u - \frac{1}{u} \right)^2$ . (2.8.4)

*Behauptung.* Es gilt  $|b_n c_n| \leq \mu^n |bc|$ .

*Beweis.* Wir bezeichnen  $x_n = b_n c_n$  und  $q = \left| u - \frac{1}{u} \right|^2$ . Aus (2.8.3) und (2.8.4) folgt  $\mu = (1 + |x_0|)q < 1$  und  $|x_{n+1}| \leq |x_n|(1 + |x_n|)q$ . Wir müssen beweisen, dass  $|x_n| \leq \mu^n |x_0|$  gilt. Für  $n = 0$  gilt das. Induktionsschritt  $n \rightarrow n + 1$ :

$$|x_{n+1}| \leq |x_n| \cdot (1 + |x_n|)q \leq \mu^n |x_0| \cdot (1 + \mu^n |x_0|)q \leq \mu^n |x_0| \cdot (1 + |x_0|)q = \mu^{n+1} |x_0|.$$

□

Aus dieser Behauptung und aus  $\mu < 1$  folgt:

- $b_{n+1}c_{n+1} \rightarrow 0$ ,
- $a_n d_n = 1 + b_n c_n \rightarrow 1$ ,
- $a_{n+1} \rightarrow u$  und  $d_{n+1} \rightarrow \frac{1}{u}$ .

Aus

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \left| a_n \left( \frac{1}{u} - u \right) \right| \rightarrow \left| u \left( \frac{1}{u} - u \right) \right| < \mu^{\frac{1}{2}} |u|$$

folgt

$$\left| \frac{b_{n+1}}{u^{n+1}} \right| < \mu^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{b_n}{u^n} \right|$$

für groß genug  $n$ . Daraus folgt

- $\frac{b_n}{u^n} \rightarrow 0$ ,
- $c_n u^n \rightarrow 0$  (analog).

Es gilt

$$T^{-n} S_{2n} T^n = \begin{bmatrix} a_{2n} & \frac{b_{2n}}{u^{2n}} \\ c_{2n} u^{2n} & d_{2n} \end{bmatrix} \rightarrow T.$$

Da  $\langle S, T \rangle$  diskret ist, ist  $T^{-n} S_{2n} T^n = T$  für alle groß genug  $n$ . Daraus folgt  $S_{2n} = T$  für alle groß genug  $n$ , also die Formel (2.8.2) ist erfüllt.

*Fall 3.*  $T$  ist elliptisch.

Nach einer passenden Konjugation in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  können wir annehmen:

$$T = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{bmatrix} \quad (u = e^{i\varphi}, 0 < \varphi < \pi).$$

Der weitere Beweis läuft wie im Fall 2. □

**Lemma 2.8.3** Jede nicht elementare Untergruppe  $G \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  enthält unendlich viele hyperbolische Elemente, dessen Fixpunktmenge disjunkt sind.

*Beweis.*

*Fall 1.*  $G$  enthält ein parabolisches Element  $f$ . Nach einer passenden Konjugation können wir annehmen, dass  $f(z) = z + 1$  ist. Dann ist  $\widehat{\text{Fix}}(f) = \{\infty\}$ . Sei  $g \in G$  ein beliebiges Element,  $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ . Dann ist

$$f^n \circ g(z) = \frac{(a + nc)z + (b + nd)}{cz + d}.$$

Folglich ist

$$\text{Tr}(f^n \circ g) = a + d + nc.$$

Da  $G$  nicht elementar ist, existiert ein  $g \in G$  mit  $\infty \notin \widehat{\text{Fix}}(g)$ . Dann ist  $c \neq 0$  und es existiert ein  $n_0$ , so dass  $|\text{Tr}(f^n \circ g)| > 2$  für alle  $n \geq n_0$  ist. Dann sind  $f^n \circ g$  hyperbolisch für alle  $n \geq n_0$ . Angenommen, dass für einige  $n_2 > n_1 \geq n_0$  gilt:

$$\widehat{\text{Fix}}(f^{n_1} \circ g) \cap \widehat{\text{Fix}}(f^{n_2} \circ g) \neq \emptyset.$$

Daraus und aus  $\widehat{\text{Fix}}(f) = \{\infty\}$  folgt  $\infty \in \widehat{\text{Fix}}(g)$ . Ein Widerspruch.

*Fall 2.*  $G$  enthält kein parabolisches Element.

Wenn  $G \setminus \{1\}$  nur elliptische Elemente enthält, dann ist  $G$  elementar (siehe Satz 2.7.3), was unmöglich ist. Deswegen enthält  $G$  mindestens ein hyperbolisches Element. Sei  $H$  die Menge aller hyperbolischen Elemente in  $G$ . Wir betrachten die Menge  $M = \bigcup_{h \in H} \widehat{\text{Fix}}(h)$ .

Für jedes  $g \in G$  und jedes  $h \in H$  ist  $ghg^{-1}$  hyperbolisch und es gilt  $\widehat{\text{Fix}}(ghg^{-1}) = g\widehat{\text{Fix}}(h)$ . Deswegen gilt  $gM = M$ . Da  $G$  nicht elementar ist, ist  $M$  unendlich.

Seien  $h_1, h_2$  zwei hyperbolische Elemente aus  $G$ . Wäre

$$|\widehat{\text{Fix}}(h_1) \cap \widehat{\text{Fix}}(h_2)| = 1,$$

dann wäre  $[h_1, h_2]$  parabolisch (siehe Aufgabe 3 aus dem Übungsblatt 4), ein Widerspruch. Deswegen gilt

$$|\widehat{\text{Fix}}(h_1) \cap \widehat{\text{Fix}}(h_2)| \in \{0, 2\}.$$

Dann folgt die Aussage aus der Unendlichkeit der Menge  $M$ . □

Folgendes Lemma ist leicht zu beweisen und wird als Aufgabe vorgeschlagen.

**Lemma 2.8.4** (1) Wenn  $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  die Ordnung 2 hat, dann ist  $\text{Tr}(T) = 0$ .

(2) Elliptische Elemente in elementaren unendlichen diskreten Gruppen haben die Ordnung 2.

**Satz 2.8.5** Sei  $G$  eine nicht elementare Untergruppe von  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Die Gruppe  $G$  ist diskret genau dann, wenn für je zwei Elemente  $S, T \in G$  die Untergruppe  $\langle S, T \rangle$  diskret ist.

*Beweis.* Jede Untergruppe einer diskreten Gruppe ist diskret. Deswegen müssen wir nur eine Richtung betrachten. Angenommen, dass für je zwei Elemente  $S, T \in G$  die Gruppe  $\langle S, T \rangle$  diskret ist, aber  $G$  selbst nicht diskret ist. Dann existiert eine Folge von verschiedenen nichttrivialen Elementen  $T_1, T_2, \dots$ , die gegen  $\mathrm{Id}$  konvergiert. Dann konvergieren ihre Spuren gegen 2. Nach Lemma 2.8.4 können wir o.B.d.A. annehmen:

$$|\mathrm{Ord}(T_n)| \neq 2 \tag{2.8.5}$$

Aus  $T_n \rightarrow \mathrm{Id}$  folgt:

$$|\mathrm{Tr}^2(T_n) - 4| + |\mathrm{Tr}(T_n S T_n^{-1} S^{-1}) - 2| \rightarrow 0.$$

Nach Jorgensen ist dann  $\langle S, T_n \rangle$  elementar für alle groß genug  $n$ . Nach Lemma 2.8.3 enthält  $G$  drei hyperbolische Elemente  $S_1, S_2, S_3$  mit

$$\widehat{\mathrm{Fix}}(S_i) \cap \widehat{\mathrm{Fix}}(S_j) = \emptyset \tag{2.8.6}$$

für  $i \neq j$ . Sei  $n$  eine natürliche Zahl, so dass die Gruppen  $G_i := \langle S_i, T_n \rangle$  elementar sind. Dann existieren nichtleere endliche  $G_i$ -invariante Teilmengen  $M_i \subseteq \widehat{\mathbb{H}}$  für  $i = 1, 2, 3$ . Da  $S_i$  hyperbolisch ist, ist  $M_i \subseteq \widehat{\mathrm{Fix}}(S_i)$ . Nach (2.8.6) sind  $M_1, M_2, M_3$  disjunkt. Die endliche Menge  $M := M_1 \cup M_2 \cup M_3$  ist  $T_n$ -invariant und es gilt  $|M| \geq 3$ . So ist  $T_n$  elliptisch und liegt in  $G_1$ . Elliptische Elemente in elementaren unendlichen diskreten Gruppen haben die Ordnung 2 (siehe Lemma 2.8.4). Ein Widerspruch zur Annahme (2.8.5).  $\square$

## 3 Fundamentalbereich

### 3.1 Definition und einige Eigenschaften

**Definition 3.1.1** Sei  $X$  ein metrischer Raum und sei  $G \leq \text{Isom}(X)$ . Eine Teilmenge  $F \subseteq X$  heißt *Fundamentalbereich* für  $G$ , falls folgende Bedingungen gelten:

- (1)  $F = \overline{\text{int}(F)}$ .
- (2)  $\bigcup_{T \in G} T(F) = X$ .
- (3)  $\text{int}(F) \cap T(\text{int}(F)) = \emptyset$  für alle  $T \in G \setminus \{1\}$ .

Die Familie  $\{T(F) \mid T \in G\}$  heißt *Überdeckung* von  $X$ .

Die Menge  $\partial F := F \setminus \text{int}(F)$  heißt *Grenze* von  $F$ .

**Bemerkung.**

- 1) Eine Gruppe kann verschiedene Fundamentalbereiche haben.
- 2) Wir werden zeigen, dass Fuchssche Gruppen zusammenhängende konvexe Fundamentalbereiche in  $\mathbb{H}$  haben.

**Satz 3.1.2** Sei  $G \leq \text{Isom}(\mathbb{H})$  und seien  $F_1$  und  $F_2$  zwei Fundamentalbereiche für  $G$ . Angenommen<sup>4</sup>  $\mu(F_1) < \infty$  und  $\mu(\partial F_1) = \mu(\partial F_2) = 0$ . Dann gilt  $\mu(F_1) = \mu(F_2)$ .

*Beweis.* Es gilt  $F_1 \supseteq F_1 \cap \left( \bigcup_{T \in G} T(\text{int} F_2) \right) = \bigcup_{T \in G} \left( F_1 \cap T(\text{int} F_2) \right)$ . Nach (3) ist diese Vereinigung disjunkt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mu(F_1) &\geq \sum_{T \in G} \mu(F_1 \cap T(\text{int} F_2)) = \sum_{T \in G} \mu(T^{-1}(F_1) \cap \text{int} F_2) \\ &= \sum_{T \in G} \mu(T(F_1) \cap \text{int} F_2) \geq \mu\left( \bigcup_{T \in G} (T(F_1) \cap \text{int} F_2) \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} \mu(\text{int} F_2) = \mu(F_2). \end{aligned}$$

Symmetrisch erhalten wir  $\mu(F_2) \geq \mu(F_1)$ . □

**Bemerkung.** Bei diesen Bedingungen hängt  $\mu(F)$  nur von  $G$  ab, deshalb schreibt man  $\mu(G)$  statt  $\mu(F)$ .

**Lemma 3.1.3** Sei  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{H}$  eine offene Teilmenge und sei  $F \subseteq \mathbb{H}$  ein Fundamentalbereich. Wenn  $\mathcal{O} \cap F \neq \emptyset$  ist, dann ist  $\mathcal{O} \cap \text{int} F \neq \emptyset$ .

**Satz 3.1.4** Sei  $G$  eine diskrete Untergruppe von  $\text{Isom}(\mathbb{H})$  und sei  $H \leq G$ . Sei  $F$  ein Fundamentalbereich für  $G$  und sei  $G = HT_1 \sqcup \dots \sqcup HT_n$ . Dann gilt:

- (a)  $F_1 = T_1(F) \cup \dots \cup T_n(F)$  ist ein Fundamentalbereich für  $H$ .
- (b) Ist  $\mu(F) < \infty$  und  $\mu(\partial F) = 0$ , dann ist  $\mu(F_1) = n \cdot \mu(F)$ .

---

<sup>4</sup>Hier ist  $\mu$  der hyperbolische Flächeninhalt.

*Beweis.* (a) Wir überprüfen die drei Punkte der Definition 3.1.1.

(1) Zuerst zeigen wir, dass  $F_1 = \overline{\text{int}(F_1)}$  gilt. Wir haben

$$\begin{aligned} \text{int } F_1 &\supseteq T_1(\text{int } F) \cup \dots \cup T_n(\text{int } F) \\ \Rightarrow \overline{\text{int } F_1} &\supseteq T_1(\overline{\text{int } F}) \cup \dots \cup T_n(\overline{\text{int } F}) = T_1(F) \cup \dots \cup T_n(F) = F_1. \end{aligned}$$

Da  $F$  abgeschlossen ist, ist  $F_1$  auch, also gilt

$$F_1 = \overline{F_1} \supseteq \overline{\text{int } F_1} \supseteq F_1.$$

Daraus folgt  $F_1 = \overline{\text{int } F_1}$ .

(2)  $\bigcup_{h \in H} h(F_1) = \bigcup_{g \in G} g(F) = X$ .

(3) Angenommen, dass

$$\text{int } F_1 \cap S(\text{int } F_1) \neq \emptyset$$

für ein  $S \in H$  gilt. Dann ist  $z = Sz'$  für einige  $z, z' \in \text{int } F_1$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  so klein, dass die offenen Kugeln  $B_\varepsilon(z)$  und  $B_\varepsilon(z')$  in  $\text{int } F_1$  liegen.

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(z') \subseteq F_1 &\implies B_\varepsilon(z') \cap T_i(F) \neq \emptyset && \text{für ein } T_i \\ &\implies S(B_\varepsilon(z')) \cap ST_i(F) \neq \emptyset \\ &\implies B_\varepsilon(z) \cap ST_i(F) \neq \emptyset \\ &\stackrel{3.1.3}{\implies} B_\varepsilon(z) \cap ST_i(\text{int } F) \neq \emptyset \\ &\implies F_1 \cap ST_i(\text{int } F) \neq \emptyset \\ &\implies T_j(F) \cap ST_i(\text{int } F) \neq \emptyset && \text{für ein } T_j \\ &\stackrel{3.1.3}{\implies} T_j(\text{int } F) \cap ST_i(\text{int } F) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Aus der Definition 3.1.1 folgt  $T_j = ST_i$ . Da  $S \in H$  ist, folgt  $T_i = T_j$  und  $S = 1$ .

(b) Nach Definition 3.1.1 (b) gilt

$$\text{int}(T_i(F)) \cap \text{int}(T_j(F)) = \emptyset$$

für  $i \neq j$ . Dann gilt

$$\mu(T_i(F) \cap T_j(F)) \leq \mu(\partial(T_i(F))) + \mu(\partial(T_j(F))) = 2\mu(\partial F) = 0.$$

Dann gilt<sup>5</sup>

$$\mu(F_1) = \mu(T_1(F) \cup \dots \cup T_n(F)) = \mu(T_1(F)) + \dots + \mu(T_n(F)) = n \cdot \mu(F).$$

□

---

<sup>5</sup>Wir benutzen die  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -Invarianz von  $\mu$ .

## 3.2 Dirichlet-Bereich

**Definition 3.2.1** Sei  $G \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  eine Fuchssche Gruppe, sei  $p \in \mathbb{H}$  ein Punkt, so dass  $\text{St}_G(p) = 1$  gilt. Der *Dirichlet-Bereich* von  $G$  im Punkt  $p$  ist

$$D_p(G) = \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p)) \text{ für alle } T \in G\}.$$

Für  $T \in G$  bezeichnen wir

$$H_p(T) = \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p))\}$$

und

$$L_p(T) = \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, p) = \rho(z, T(p))\}.$$

Dann gilt

$$D_p(G) = \bigcap_{T \in G \setminus \{1\}} H_p(T).$$

**Lemma 3.2.2** Für den Dirichlet-Bereich  $D_p(G)$  gelten:

- (1)  $D_p(G)$  enthält eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $p$ .
- (2)  $D_p(G)$  ist konvex, abgeschlossen, und es gilt  $D_p(G) = \overline{\text{int}(D_p(G))}$ .

*Proof.* (1) Die Gruppe  $G$  ist diskret, deswegen ist der Orbit  $G(p)$  diskret. Also existiert  $\varepsilon > 0$  mit

$$B_\varepsilon(p) \cap G(p) = \{p\}.$$

Daraus und aus  $\text{St}_G(p) = 1$  folgt

$$B_\varepsilon(p) \cap T(p) = \{p\}$$

für alle  $T \in G \setminus \{1\}$ . Dann gilt

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p) \subseteq H_p(T).$$

(2) Die Konvexität und die Abgeschlossenheit von  $D_p(G)$  ist offenbar. Sei  $z \in D_p(G)$ . Dann gilt

$$\bigcup_{z' \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)} [z', z] \subseteq D_p(G),$$

woraus folgt  $z \in \overline{\text{int}(D_p(G))}$ . □

**Lemma 3.2.3** Seien  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ . Wir betrachten die Equidistante

$$\text{Equidist}(z_1, z_2) := \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, z_1) = \rho(z, z_2)\}.$$

Dann ist diese Menge eine eindeutige Geodäte, die durch die ‘‘hyperbolische Mitte’’ des hyperbolischen Segments  $[z_1, z_2]$  senkrecht zu diesem Segment läuft.

*Beweis.* O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $z_1 = i$  und  $z_2 = ir^2$  für ein  $r > 0$  gilt. Mit Hilfe des Satzes 1.3.8(2) gilt für  $z \in \text{Equidist}(z_1, z_2)$ :

$$|z - i|^2 = \frac{|z - ir^2|^2}{r^2}.$$

Nach einer kurzen Berechnung bekommen wir  $|z| = r$ . □



**Lemma 3.2.4** Ist  $z \in \text{int } D_p(G)$ , dann ist für alle  $T \in G \setminus \{1\}$

$$\rho(z, p) < \rho(z, T(p)).$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(z) \subseteq D_p(G)$ . Angenommen, dass für ein  $T \in G \setminus \{1\}$  gilt:

$$\rho(z, p) \geq \rho(z, T(p)).$$

Es existiert ein  $z' \in B_\varepsilon(z)$  mit  $\rho(z', p) > \rho(z, p)$ . Dann gilt

$$\rho(z', p) > \rho(z, T(p))$$

und so gilt  $z' \notin H_p(T) \subseteq D_p(G)$ . Ein Widerspruch mit  $z' \in B_\varepsilon(z) \subseteq D_p(G)$ .  $\square$

Man kann dieses Lemma folgendermaßen umformulieren

**Lemma 3.2.5** Ist  $z \in \text{int } D_p(G)$ , dann ist für alle  $T \in G \setminus \{1\}$

$$\rho(z, p) < \rho(T(z), p).$$

**Satz 3.2.6** Sei  $G \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  eine Fuchssche Gruppe, sei  $p \in \mathbb{H}$  ein Punkt, so dass  $\text{St}_G(p) = 1$  gilt. Dann ist der *Dirichlet-Bereich*  $D_p(G)$  ein konvexer und zusammenhängender Fundamentalbereich für  $G$ .

*Beweis.* Wir überprüfen die drei Bedingungen der Definition 3.2.1.

(1)  $D_p(G) = \overline{\text{int}(D_p(G))}$  ist schon bewiesen in Lemma 3.2.2.

(2) Wir zeigen  $\bigcup_{T \in G} T(D_p(G)) = \mathbb{H}$ .

Sei  $z \in \mathbb{H}$  beliebig. Nach Folgerung 2.5.5 hat der Orbit  $G(z)$  keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{H}$ . Deswegen existiert  $z_0 \in G(z)$  mit

$$\rho(p, z_0) = \min_{z' \in G(z)} \rho(p, z').$$

Dann gilt

$$\rho(p, z_0) \leq \rho(p, T(z_0))$$

für alle  $T \in G$ . Äquivalent ist

$$\rho(p, z_0) \leq \rho(T(p), z_0)$$

für alle  $T \in G$ . Daraus folgt  $z_0 \in D_p(G)$ . Da  $z_0 \in G(z)$  ist, liegt jeder Punkt  $z \in \mathbb{H}$  in dem  $G$ -orbit eines Punktes  $z_0$  aus  $D_p(G)$ . Dann ist die Bedingung (2) erfüllt.

(3) Wir zeigen, dass für alle  $T \in G \setminus \{1\}$  gilt

$$\text{int}(D_p(G)) \cap T(\text{int}(D_p(G))) = \emptyset.$$

Wenn das nicht stimmt, dann existieren  $z, z' \in \text{int}(D_p(G))$  mit  $z' = Tz$  für ein  $T \in G \setminus \{1\}$ . Nach Lemma 3.2.5 gilt

$$\rho(z, p) < \rho(z', p) < \rho(z, p).$$

Ein Widerspruch.

Es ist klar, dass  $D_p(G)$  konvex und so wegzusammenhängend ist. Dann ist  $D_p(G)$  zusammenhängend.  $\square$

**Satz 3.2.7** Sei  $G = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  und sei  $p = ki$  mit  $k > 1$ . Dann ist

$$D_p(G) = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1, |\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $M$  die Menge in der rechten Seite dieser Gleichung. Mit Hilfe des Lemmas 3.2.3 ist es leicht zu überprüfen, dass  $L_p(T)$ ,  $L_p(T^{-1})$  und  $L_p(S)$  die drei Seiten von  $M$  sind. Daraus folgt  $D_p(G) \subseteq M$ .

Angenommen  $D_p(G) \neq M$ . Aus der Abgeschlossenheit beider Mengen folgt, dass ein

$$z \in \text{int}(M) \setminus D_p(G)$$

existiert. Da  $D_p(G)$  ein Fundamentalbereich für  $G$  ist, existiert ein  $g \in G \setminus \{1\}$  mit  $g(z) \in D_p(G)$ . Nach einer kleinen Variation von  $z$  können wir Folgendes annehmen:

$$g(z) \in \text{int}(D_p(G)).$$

Also gelten

$$z \in \text{int}(M) \quad \text{und} \quad g(z) \in \text{int}(M) \tag{3.2.1}$$

für ein  $g \in G \setminus \{1\}$ . Sei  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Dann gilt

$$|cz+d|^2 = (cz+d)(c\bar{z}+d) = c^2|z|^2 + 2\text{Re}(z)cd + d^2 > c^2 + d^2 - |cd| = (|c| - |d|)^2 + |cd| \in \mathbb{N},$$

sonst wäre  $c = d = 0$ , was unmöglich ist. Daraus folgt

$$\text{Im}(g(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2} < \text{Im}(z).$$

Nach Symmetrie folgt analog aus (3.2.1):  $\text{Im}(z) < \text{Im}(g(z))$ . Ein Widerspruch. Also gilt  $D_p(G) = M$ .  $\square$

### 3.3 Limesmenge $\Lambda(G)$

Wir erinnern uns an die Definition 2.5.6: Sei  $G \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  eine Fuchssche Gruppe. Die Menge aller Häufungspunkte aller Orbits  $G(z)$ ,  $z \in \mathbb{H}$ , heißt *Limesmenge* der Gruppe  $G$  und wird mit  $\Lambda(G)$  bezeichnet. Kurz:

$$\Lambda(G) = \bigcup_{z \in \mathbb{H}} \text{HP}(G(z)).$$

Wir haben gemerkt, dass  $\Lambda(G)$  ist  $G$ -invariant und es gilt:

$$\Lambda(G) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\} \tag{3.3.1}$$

Nach Aufgabe 1(a) aus dem Übungsblatt 4 gilt:

$$\overline{\Lambda(G)} = \Lambda(G).$$

Bei der Lösung dieser Aufgabe haben wir folgendes bewiesen: Für jeden Punkt  $z_0 \in \mathbb{H}$  gilt

$$\Lambda(G) = \text{HP}(G(z_0)). \tag{3.3.2}$$

**Lemma 3.3.1** Sei  $G$  eine Fuchssche Gruppe und sei  $\alpha \in \Lambda(G)$ . Für je zwei verschiedene Punkte in  $\beta, \gamma \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \setminus \{\alpha\}$  gilt

$$\alpha \in \text{HP}(G(\beta)) \cup \text{HP}(G(\gamma)).$$

*Beweis.* Sei  $K_{\beta, \gamma}$  die offene Geodäte, die  $\beta$  und  $\gamma$  verbindet. Sei  $z_0 \in K_{\beta, \gamma}$  ein beliebiger Punkt. Aus (3.3.2) folgt, dass es eine Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  verschiedener Elemente von  $G$  mit  $T_n(z_0) \rightarrow \alpha$  gibt. Dann existiert eine Teilfolge  $(T_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass  $T_{n_k}(\beta) \rightarrow \alpha$  oder  $T_{n_k}(\gamma) \rightarrow \alpha$  ist. O.B.d.A. gilt  $T_n(\beta) \rightarrow \alpha$ .

Fall 1. Es gilt  $T_n(\beta) \neq \alpha$  für alle  $n$ .

Dann ist  $\alpha \in \text{HP}(G(\beta))$ .

Fall 2. Es gilt  $T_n(\beta) = \alpha$  und  $T_m(\beta) = \alpha$  für einige  $n \neq m$ .

Dann ist  $g := T_n T_m^{-1}$  ein nichttriviales Element aus  $\text{St}_G(\alpha)$ . Da  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ist, ist  $g$  nicht elliptisch.

- (a) Wenn  $g$  hyperbolisch ist, dann ist  $\widehat{\text{Fix}}(g) = \{\alpha, \alpha'\}$  für ein  $\alpha' \neq \alpha$ . Wenn es ein von zwei Elementen,  $\beta$  oder  $\gamma$ , sagen wir  $\beta$ , nicht in  $\widehat{\text{Fix}}(g)$  liegt, dann gilt  $\alpha \in \text{HP}(\langle g \rangle(\beta))$  wegen der bekannten Dynamik des hyperbolischen Elements.
- (b) Wenn  $g$  parabolisch ist, dann ist  $\widehat{\text{Fix}}(g) = \{\alpha\}$ , und der Beweis ist analog zu (a).  $\square$

**Satz 3.3.2** Sei  $G$  eine Fuchssche Gruppe. Wenn  $|\Lambda(G)| \geq 2$  ist, dann ist  $\Lambda(G)$  der Abschluss der Menge aller Fixpunkte aller hyperbolischen Elemente von  $G$ :

$$\Lambda(G) = \overline{\bigcup_{\substack{g \in G \\ g \text{ ist hyp.}}} \text{Fix}(g)}. \quad (3.3.3)$$

*Beweis.* Zuerst beweisen wir, dass  $G$  mindestens ein hyperbolisches Element enthält. Wenn  $G \setminus \{1\}$  nur elliptische Elemente enthält, dann ist  $G \cong \mathbb{Z}_n$  nach Folgerung 2.7.4. Dann wäre  $\Lambda(G) = \emptyset$ .

Angenommen, dass  $G \setminus \{1\}$  nur parabolische Elemente enthält. Sei  $T \in G$  ein parabolisches Element. Nach einer passenden Konjugation können wir annehmen, dass  $T : z \mapsto z + k$  und somit  $\text{Fix}(T) = \{\infty\}$  ist. Dann existiert  $S \in G$  mit  $\infty \notin \text{Fix}(S)$ .

(Sonst wäre  $\{\infty\}$  ein  $G$ -orbit, dann wäre  $G$  eine elementare Fuchssche Gruppe, dann wäre  $G$  zyklisch (nach Satz 2.7.5) mit einem parabolischen Erzeuger, dann wäre  $\Lambda(G) = \{\infty\}$ , was unmöglich ist.)

Sei  $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $ad - bc = 1$ . Da  $\infty \notin \text{Fix}(S)$  ist, ist  $c \neq 0$ . Dann gilt:

$$|\text{Tr}(T^n S)| = \left| \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \right| = |a + d + nkc| > 2$$

für groß genug  $n$ . Daraus folgt, dass  $T^n S$  ein hyperbolisches Element für groß genug  $n$  ist. Ein Widerspruch.

Also enthält  $G$  ein hyperbolisches Element  $g_0$ . Sei  $\text{Fix}(g_0) = \{\beta, \gamma\}$ . Nach Lemma 3.3.1 gilt

$$\Lambda(G) \subseteq \overline{G(\beta)} \cup \overline{G(\gamma)}.$$

Das liegt in der rechten Seite der Formel (3.3.3), weil für alle  $g \in G$  gilt:  $g(\{\beta, \gamma\}) = \text{Fix}(gg_0g^{-1})$  und  $gg_0g^{-1}$  ist hyperbolisch.

Die rechte Seite von (3.3.3) liegt in  $\Lambda(G)$ , weil  $\Lambda(G)$  abgeschlossen ist (Aufgabe 1(a) im Übungsblatt 4).  $\square$

**Definition 3.3.3** Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $M \subseteq X$  eine Teilmenge.

- (a)  $M$  heißt *dicht* in  $X$ , falls  $\overline{M} = X$  ist.
- (b) Ein Punkt  $m \in M$  heißt *isolierter* Punkt von  $M$ , falls es eine Umgebung  $U$  von  $m$  gibt, die keine anderen Elemente aus  $M$  enthält.
- (c)  $M$  heißt *insichdicht*, falls  $M$  keine isolierten Punkte besitzt. Mit anderen Worten, es gilt  $M \subseteq \text{HP}(M)$ .
- (d) Abgeschlossene insichdichte Mengen  $M$  heißen *perfekt*. Mit anderen Worten, es gilt  $M = \text{HP}(M)$ .
- (e)  $M$  heißt genau dann *nirgends dicht*, wenn  $M$  in keiner Umgebung eines ihrer Elemente dicht liegt. Dies ist äquivalent dazu, dass jede Umgebung jedes  $m \in M$  eine nichtleere offene Teilmenge enthält, die keine Elemente von  $M$  enthält.