Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 17.12. bis 12:30 Uhr

Geometrische Gruppentheorie
Übungsblatt 10

Aufgabe 1. In der Vorlesung haben wir folgenden Satz formuliert: **10P.**

Satz (Tarski) Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Sei E eine nicht leere Teilmenge von X. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) E ist *nicht* G-paradoxal.

(2) Es existiert eine endlich-additive G-invariante Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, so dass $\mu(E) \in (0, \infty)$ ist.

Beweisen Sie die Richtung (2)$\Rightarrow$ (1).

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. **6+10P.**

(1) Finden Sie eine Fölner-Folge $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(2) Sei B_n die Menge aller Elemente in der freien Gruppe $F(a, b)$ mit einer Länge von 0 bis n.

(a) Berechnen Sie
$$|B_n|.$$

(b) Berechnen Sie
$$\frac{|aB_2 \vartriangle B_2|}{|B_2|}.$$

(c) Finden Sie
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|aB_n \vartriangle B_n|}{|B_n|}.$$

Aufgabe 3. Sei X ein kompakter topologischer Raum. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen der Menge X, so dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind: **14P.**

(1) Jedes M_i ist nicht leer und abgeschlossen.

(2) Für je zwei Indizes $i, j \in I$ existiert ein Index $k \in I$ mit $M_k \subseteq M_i \cap M_j$.

Beweisen Sie, dass $\bigcap\limits_{i\in I} M_i \neq \emptyset$ gilt.