Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 14.01. bis 12:30 Uhr

Geometrische Gruppentheorie
Übungsblatt 11

Definition. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Sei $S \subseteq G$ eine endliche Teilmenge, die G erzeugt.

(1) Die Funktion $\ell_{G,S} : G \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$\ell_{G,S}(g) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid g = s_1 s_2 \dots s_k,\ \ s_1, \dots, s_k \in S \cup S^{-1}\}$$

heißt *Länge-Funktion* auf G bezüglich S.

(2) Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt die Menge

$$B_{G,S}(n) = \{g \in G \mid \ell_{G,S}(g) \leqslant n\}$$

Kugel von Radius n in G bezüglich S.

(3) Die Funktion $\gamma_{G,S} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$\gamma_{G,S}(n) = |B_{G,S}(n)|$$

heißt *Wachstumsfunktion* von G bezüglich S.

(4) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ zwei Funktionen. Wir schreiben $f_1 \preccurlyeq f_2$, falls Konstante α, β, γ existieren, so dass $f_1(n) \leqslant \alpha \cdot f_2(\beta n) + \gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wir schreiben $f_1 \sim f_2$, falls $f_1 \preccurlyeq f_2$ und $f_2 \preccurlyeq f_1$ gilt. In diesem Fall heißen f_1 und f_2 *äquivalent.*

Aufgabe 1. **5+5P.**

1) Berechnen Sie die Länge-Funktion von $\mathbb{Z}$ bezüglich $S = \{2, 3\}$.
2) Berechnen Sie die Länge-Funktion der unendlichen Dieder-Gruppe

$$D_\infty = \langle a, t \mid a^2 = 1, a^{-1}ta = t^{-1}\rangle$$

bezüglich $S = \{a, at\}$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie: **8P.**
Sind S_1 und S_2 zwei *endliche* Erzeugendensysteme von G, dann gilt $\gamma_{G,S_1} \sim \gamma_{G,S_2}$.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Heisenberg-Gruppe **10P.**

$$H_3 = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweisen Sie, dass die Wachstumsfunktion von H_3 nicht e^n äquivalent ist.

Aufgabe 4. **12P.**

Sei $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine *submultiplikative* Funktion, also gilt

$$\gamma(n + m) \leqslant \gamma(n) \cdot \gamma(m)$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} (\gamma(n))^{1/n}$ existiert.