Prof. Dr. Oleg Bogopolski | Abgabe: 28.01. bis 12:30 Uhr

**Geometrische Gruppentheorie**
Übungsblatt 13

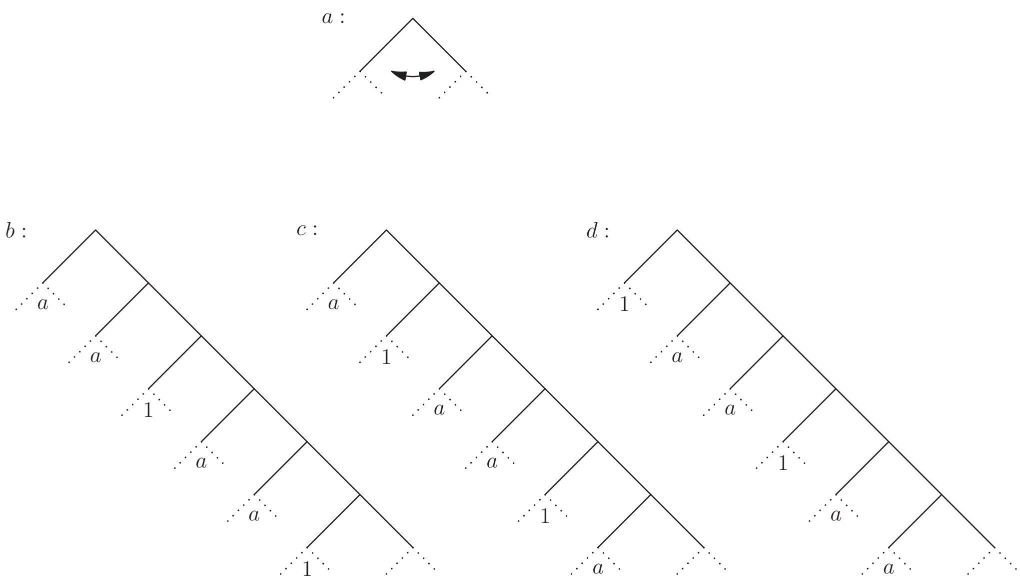


Fig. 1. Erzeuger der Grigorchuk-Gruppe $G$.

**Aufgabe 1.** **10P.**

(a) Finden Sie ein $g \in \mathrm{St}(2) \setminus \mathrm{St}(3)$.

(b) Überprüfen Sie $(b \cdot aba)^4 \in \mathrm{St}(3)$.

*Hinweis.* Benutzen Sie $b = (a, c), \quad c = (a, d), \quad d = (1, b)$.

**Aufgabe 2.** **10P.**

(a) Beweisen Sie, dass $\mathrm{St}(n)$ normal in $G$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Beweisen Sie, dass $G/\mathrm{St}(2)$ usomorph zu $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$ ist.

*Hinweis.* $A \wr B \cong \mathrm{fun}(B, A) \rtimes B$, siehe mein Kurzskript von 2016.

**Aufgabe 3.** Sei $g$ ein Element der Grigorchuk-Gruppe $G$ und sei $g = x_1 x_2 \ldots x_n$ die kürzeste Darstellung von $g$ mit $x_i \in \{a, b, c, d\}$, $i = 1, \ldots, n$. **10P.**
Sei $k$ die Anzahl von Buchstaben $a$ in dieser Darstellung. Beweisen Sie $\frac{n-1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$.

**Aufgabe 4.** Sei $G = A \wr B$ das Kranzprodukt mit $A = S_3$ und $B = \{e_B, b\} \cong \mathbb{Z}_2$. **10P.**
Wir betrachten die Gleichung $x^2 = e_B h$, wobei $h \in \mathrm{fun}(B, A)$ wie folgt gegeben ist:

$$h(e_B) = (123), h(b) = (132).$$

Diese Gleichung hat vier Lösungen. Finden Sie zwei davon.