Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 5.11. bis 12:30 Uhr

Geometrische Gruppentheorie
Übungsblatt 4

Zur Erinnerung:

Satz 1.7 des Kurzskripts. Sei $\varphi \in \mathbf{Isom}(\mathbb{E})$.
1) Besitzt φ einen Fixpunkt, so ist φ eine Rotation oder eine Spiegelung.
2) Besitzt φ keinen Fixpunkt, so ist φ eine Translation oder eine Gleitspiegelung.

Aufgabe 1. **12P.**
Beweisen Sie: Ist r eine Rotation und t eine Translation, dann ist $r \circ t$ eine Rotation.

Hinweis. Zuerst beweisen Sie, dass $r \circ t$ einen Fixpunkt hat. Dann wenden Sie Teil 1) des Satzes 1.7 an.

Aufgabe 2. **12P.**
In der Vorlesung haben wir Teil 1) des Satzes 1.7 bewiesen. Beweisen Sie Teil 2).

Hinweis. Sei $A \in \mathbb{E}$ ein beliebiger Punkt, sei $A_1 := \varphi(A)$. Sei t eine Translation mit $A_1 = t(A)$. Dann besitzt die Komposition $t^{-1} \circ \varphi$ einen Fixpunkt, nämlich A. Weiterhin dürfen Sie Teil 1) und Lemma 1.6 benutzen.

Aufgabe 3. **2+6P.**
Seien s_1 und s_2 zwei Spiegelungen mit den Achsen l_1 und l_2. Beweisen Sie:
a) Ist $l_1 \parallel l_2$, dann ist $s_1 s_2$ eine Translation.
b) Ist $l_1 \nparallel l_2$, dann ist $s_1 s_2$ eine Rotation.

Aufgabe 4. Wir definieren eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8: **2+6P.**
Quat $:= \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ mit der Multiplikation gegeben durch

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1,$$

$$ij = -ji = k, \;\; jk = -kj = i, \;\; ki = -ik = j$$

und weiteren natürlichen Regeln (z.B. $(-1)(-k) = k$).

(a) Lesen Sie im Netz die Definition der Diedergruppe D_n der Ordnung $2n$. Geben Sie diese Definition wieder.

(b) Wie viele Elemente der Ordnung 4 gibt es in D_4 und in Quat? Leiten Sie daraus ab, dass die Gruppen Quat und D_4 nicht isomorph sind.