Geometrische Gruppentheorie
Übungsblatt 5

Zur Erinnerung:

Definition 2.1. Eine Untergruppe G von $\mathbf{Isom}\,(\mathbb{E})$ heißt *diskret*, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

1) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{E}$ existiert ein $r > 0$ mit $G(x) \cap B_x(r) = \{x\}$.

2) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{E}$ existiert kein Akkumulationspunkt[1] für die Menge $G(x)$.

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Äquivalenz der Bedingungen 1) und 2) aus Definition 2.1. **1+9P.**

Aufgabe 2. Seien $G_1 \leqslant G \leqslant \mathbf{Isom}\,(\mathbb{E})$ zwei Untergruppen mit Index $|G : G_1| < \infty$. **2+8P.**
Beweisen Sie, dass G diskret ist genau dann, wenn G_1 diskret ist.

Aufgabe 3. **4x5P.**

(a) Seien r_1, r_2 Rotationen um 180 Grad um zwei verschiedene Punkte. Beweisen Sie: Die Gruppe $\langle r_1, r_2\rangle$ ist diskret und es gilt $\langle r_1, r_2\rangle \cap \mathbf{T}(\mathbb{E}) \cong \mathbb{Z}$.

(b) Seien r_1, r_2, r_3 Rotationen um 180 Grad um drei verschiedene Punkte, die auf einer Geraden liegen. Geben Sie ein Beispiel mit $\langle r_1, r_2, r_3\rangle \cap \mathbf{T}\,(\mathbb{E}) \cong \mathbb{Z}$ und ein Beispiel mit $\langle r_1, r_2, r_3\rangle \cap \mathbf{T}\,(\mathbb{E}) \cong \mathbb{Z}^2$. Beweisen Sie, dass $\langle r_1, r_2, r_3\rangle$ in der letzten Situation nicht diskret ist.

(c) Seien r_1, r_2, r_3 Rotationen um 180 Grad um drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Beweisen Sie: $\langle r_1, r_2, r_3\rangle \cap \mathbf{T}\,(\mathbb{E}) \cong \mathbb{Z}^2$.

(d) Sei r eine nichttriviale Rotation um $\alpha \neq 180$ Grad und sei t eine nichttriviale Translation. Beweisen Sie: $\langle r, t\rangle \cap \mathbf{T}\,(\mathbb{E}) \cong \mathbb{Z}^n$ für $n \geqslant 2$.

Aufgabe 4. Wir definieren eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8: **2+6P.**
Quat $:= \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ mit der Multiplikation gegeben durch

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = k,\ \ jk = i,\ \ ki = j,$$
$$ji = -k,\ \ kj = -i,\ \ ik = -j$$

und weiteren natürlichen Regeln (z.B. $(-1)(-k) = k$).

(a) Lesen Sie im Netz die Definition der Diedergruppe D_n der Ordnung $2n$. Geben Sie diese Definition wieder.

(b) Wie viele Elemente der Ordnung 4 gibt es in D_4 und in Quat? Leiten Sie daraus ab, dass die Gruppen Quat und D_4 nicht isomorph sind.

[1] Ein Punkt $y \in \mathbb{E}$ heißt *Akkumulationspunkt* der Menge $M \subseteq \mathbb{E}$, falls es in jeder Scheibe $B_y(r)$ Elemente aus $M \setminus \{y\}$ gibt.