Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 10.12. bis 12:30 Uhr

**Geometrische Gruppentheorie**
Übungsblatt 9

**Aufgabe 1.** **7+7P.**

(a) Sei $B$ eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}$ eine Zahl. Beweisen Sie: Wenn $B$ in $(n+B)$ liegt, dann ist $(n+B) \setminus B$ endlich.

(b) Seien $A_1, A_2, B_1, B_2$ disjunkte Teilmengen von $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass es keine ganze Zahlen $k_1, k_2, n_1, n_2$ mit $\mathbb{Z} = (k_1 + A_1) \cup (k_2 + A_2) = (n_1 + B_1) \cup (n_2 + B_2)$ gibt.

**Aufgabe 2.** Sei $G$ eine Gruppe, die auf einer Menge $X$ operiert. **6+6P.**

(a) Seien $A$ und $B$ Teilmengen von $X$, die *prekongruent* bezüglich $G$ sind: $A \sim_G B$. Dann existiert eine Bijektion $\varphi : A \to B$ mit $C \sim_G \varphi(C)$ für alle Teilmengen $C \subseteq A$.

(b) Sei $A$ eine Teilmenge von $X$ und seien $g_1, g_2, h_1, h_2$ Elemente aus $G$, so dass die Mengen $g_1A$ und $g_2A$ disjunkt sind, aber $h_1A$ und $h_2A$ nicht. Beweisen Sie, dass $h_1A \cup h_2A$ prekongruent zu einer Teilmenge von $g_1A \cup g_2A$ ist.

**Aufgabe 3.** Sei $F(a,b)$ die freie Gruppe mit der Basis $a, b$. Wir betrachten folgende Untergruppen von Index 2 in $F(a,b)$: **14P.**

$$\begin{aligned} H_1 &= \langle a, b^2, bab^{-1} \rangle \\ H_2 &= \langle a^2, b^2, ab \rangle. \end{aligned}$$

Finden Sie ein endliches Erzeugersystem von $H_1 \cap H_2$.