Flache kristallographische Gruppen

1. Isometrien der Ebene

Sei $\mathbb{E}$ die Ebene mit der euklidischen Metrik d.

Definition 1.1. Eine Abbildung $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ heißt *Isometrie*, falls

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{E}$ ist.

Alle Isometrien der Ebene $\mathbb{E}$ bilden eine Gruppe bezüglich Komposition. Diese Gruppe wird mit $\mathbf{Isom}(\mathbb{E})$ bezeichnet.

Satz 1.2. Jede Isometrie von $\mathbb{E}$ ist eindeutig bestimmt durch ihre Wirkung auf beliebige drei Punkte von $\mathbb{E}$, die nicht auf einer Geraden liegen.

Bezeichnung 1.3. Sei O ein Punkt in $\mathbb{E}$. Wir betrachten folgende Untergruppen von $\mathbf{Isom}(\mathbb{E})$:

$$\mathbf{Isom}^+(\mathbb{E}) = \{\varphi \in \mathbf{Isom}(\mathbb{E}) \,|\, \varphi \text{ ist orientierungserhaltend}\},$$

$$\mathbf{O}(\mathbb{E}) = \{\varphi \in \mathbf{Isom}(\mathbb{E}) \,|\, \varphi(O) = O\},$$

$$\mathbf{T}(\mathbb{E}) = \{\varphi \in \mathbf{Isom}(\mathbb{E}) \,|\, \varphi \text{ ist eine Translation}\}.$$

Satz 1.4. Es gilt:

1) $|\,\mathbf{Isom}(\mathbb{E}) : \mathbf{Isom}^+(\mathbb{E})| = 2$,
2) $\mathbf{Isom}(\mathbb{E}) = \mathbf{T}(\mathbb{E}) \rtimes \mathbf{O}(\mathbb{E})$.

Definition 1.5. Eine *Gleitspiegelung* ist eine Spiegelung an einer Geraden von $\mathbb{E}$ verknüpft mit einer nichttrivialen Translation parallel zu dieser Geraden.

Lemma 1.6. Sei s eine Spiegelung und sei t eine Translation. Dann ist st eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung.

Satz 1.7. Sei $\varphi \in \mathbf{Isom}(\mathbb{E})$.

- Besitzt φ einen Fixpunkt, so ist φ eine Rotation oder eine Spiegelung.
- Besitzt φ keinen Fixpunkt, so ist φ eine Translation oder eine Gleitspiegelung.

Insbesondere gibt es nur 4 Sorten von Isometrien der Ebene: Rotationen, Translationen, Spiegelungen, Gleitspiegelungen:

$$\mathbf{Isom}(\mathbb{E}) = R \cup T \cup SP \cup GSP.$$

Dabei ist $R \cap T = \{\text{id}\}$.

Lemma 1.8. Es gilt:

1) Seien s_1 und s_2 zwei Spiegelungen mit den Achsen l_1 und l_2.
   Ist $l_1 \parallel l_2$, dann ist $s_1 s_2$ eine Translation.
   Ist $l_1 \nparallel l_2$, dann ist $s_1 s_2$ eine Rotation.
2) Seien r_1 und r_2 zwei Rotationen mit dem Rotationswinkel[1] α_1 und α_2. Sei α die Summe von α_1 und α_2 modulo 2π.
   Ist $\alpha = 0$, dann ist $r_1 r_2$ eine Translation.
   Ist $\alpha \neq 0$, dann ist $r_1 r_2$ eine Rotation mit dem Rotationswinkel α.

2. **Diskrete Untergruppen von Isom** $(\mathbb{E})$

Definition 2.1. Sei G eine Untergruppe von **Isom** $(\mathbb{E})$. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{E}$ heißt die Menge

$$G(x) := \{g(x) \mid g \in G\}$$

G-Bahn von x.

Für $x \in \mathbb{E}$ und $r > 0$ sei $B_x(r)$ die Scheibe in $\mathbb{E}$ mit Zentrum x und Radius r.

Definition 2.2. Eine Untergruppe G von **Isom** $(\mathbb{E})$ heißt *diskret*, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist:

1) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{E}$ existiert ein $r > 0$ mit $G(x) \cap B_x(r) = \{x\}$.
2) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{E}$ besitzt $G(x)$ keinen Akkumulationspunkt.

Beispiel.

a) Sei R_α eine Rotation um einen Punkt um α Grad. Dann ist die Gruppe $\langle R_\alpha \rangle$ diskret genau dann, wenn α eine rationale Zahl ist.
b) Sei T_α eine Translation um die Länge α in der horizontalen Richtung. Dann ist die Gruppe $\langle T_\alpha \rangle$ für jedes α diskret, aber die Gruppe $\langle T_1, T_{\sqrt{2}} \rangle$ nicht.

Lemma 2.3. Sei G eine diskrete Untergruppe der Translationsgruppe $\mathbf{T}(\mathbb{E})$. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{E}$ und jede Teilmenge $G_1 \subseteq G \setminus \{1\}$ existiert ein $g \in G_1$ mit

$$d(x, g(x)) = \min_{g_1 \in G_1} d(x, g_1(x)) > 0.$$

Satz 2.4. Sei G eine diskrete Untergruppe von **Isom** $(\mathbb{E})$. Dann ist

$$G \cap \mathbf{T}(\mathbb{E}) \cong \mathbb{Z}^r$$

mit $r = 0, 1,$ oder 2.

[1]Der Winkel wird entsprechend dem Uhrsinnzeiger gemessen.

Skizze des Beweises. Wir bezeichnen $T := G \cap \mathbf{T}(\mathbb{E})$. Dann ist T diskret, weil G diskret ist. Nehmen wir an $T \neq \{1\}$. Nach Lemma 2.3 existiert ein $a \in T \setminus \{1\}$ mit

$$d(x, a(x)) = \min_{t \in T \setminus \{1\}} d(x, t(x)) > 0.$$

Wenn $T = \langle a \rangle$ ist, dann sind wir fertig. Nehmen wir an, dass $T \neq \langle a \rangle$ ist. Wir betrachten die Gerade L, die die Menge $\{a^i(x) \,|\, i \in \mathbb{Z}\}$ enthält. Es ist leicht zu verstehen, dass L keinen Punkt aus der Menge $(T \setminus \langle a \rangle)(x)$ enthällt. Wieder nach Lemma 2.3 existiert ein $b \in T \setminus \langle a \rangle$ mit

$$d(x, b(x)) = \min_{t \in T \setminus \langle a \rangle} d(x, t(x)) > 0.$$

Wir betrachten die Gerade M, die die Menge $\{b^i(x) \,|\, i \in \mathbb{Z}\}$ enthält. Es gilt $L \cap M = \{x\}$. Dann werden die Geraden $a^i(M)$ und $b^j(L)$ die Ebene $\mathbb{E}$ in Parallelogramme zerteilen. ... Schließlich wird das folgende Lemma benutzt. $\square$

Lemma 2.5. Sei P ein Punkt in einem Dreieck ABC, so dass $P \neq B, C$ ist. Dann gilt $|AP| < |AB|$ oder $|AP| < |AC|$.

2.1. Klassifikation von Untergruppen $G \leqslant$ Isom $(\mathbb{E})$ mit $G \cap \mathbf{T}(\mathbb{E}) = \mathbf{1}$.

Satz 2.6. Ist G eine Untergruppe von **Isom** $(\mathbb{E})$ mit $G \cap \mathbf{T}(\mathbb{E}) = \mathbf{1}$, dann existiert ein Punkt $O \in \mathbb{E}$ mit $G(O) = \{O\}$.

Skizze des Beweises. Wenn g eine Gleitspiegelung ist, dann ist g^2 eine nichttriviale Translation. Deswegen besteht G ausschließlich aus Rotationen und Spiegelungen. Angenommen $G \neq \{1\}$.

Fall 1. $G \setminus \{1\}$ besteht nur aus Spiegelungen.

Enthält G nur eine Spiegelung, dann sind wir fertig. Enthällt G mindestens zwei Spiegelungen s_1, s_2, dann ist $s_1 s_2$ eine Translation oder Rotation (s. Lemma 1.8) und wir bekommen einen Widerspruch.

Fall 2. $G \setminus \{1\}$ besitzt eine Rotation $r \in G$ um einen Punkt O.

Nehmen wir an, dass ein $g \in G$ mit $g(O) \neq O$ existiert. Wir bezeichnen $O_1 = g(O)$. Dann ist grg^{-1} eine Rotation um O_1 und $r^{-1}grg^{-1}$ eine nichttriviale Translation. Ein Widerspruch. $\square$

Korollar 2.7. Jede endliche Untergruppe G von **Isom** $(\mathbb{E})$ ist entweder zyklisch oder dihedral, also ist $G \cong \mathbb{Z}_n$ oder $G \cong D_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Skizze des Beweises. Da G endlich ist, ist $G \cap \mathbf{T}(\mathbb{E}) = \mathbf{1}$. Nach Satz 2.6 existiert ein Punkt O mit $G(O) = \{O\}$. Insbesondere besteht G nur aus Rotationen und Spiegelungen.

Fall 1. G besteht nur aus Rotationen.

Ist $G = \mathbf{1}$, dann sind wir fertig. Ist $G \neq \mathbf{1}$, dann besitzt G eine nichttriviale Rotation mit dem minimalen Rotationswinkel $\alpha > 0$. Dann ist $n := 360/\alpha$ eine natürliche Zahl und es gilt $G \cong \mathbb{Z}_n$.

Fall 2. G besitzt mindestens eine Spiegelung s. Sei G_1 die Untergruppe aller Rotationen aus G. Wie im Fall 1 ist $G_1 \cong \mathbb{Z}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $G = G_1 \cup sG_1$, also ist $|G : G_1| = 2$. Es ist leicht dann ein reguläres n-Eck P mit $\mathrm{Sym}(P) = G$ zu konstruieren. Dann ist $G \cong D_n$. □

Korollar 2.8. Jede diskrete Untergruppe G von $\mathbf{Isom}\,(\mathbb{E})$ mit $G \cap \mathbf{T}(\mathbb{E}) = \mathbf{1}$ ist endlich.

Beweis. Die Gruppe G fixiert einen Punkt O und besteht aus Rotationen und Spiegelungen. Sei G_1 die Untergruppe aller Rotationen von G. Wegen der Diskretheit von G ist G_1 endlich. Da $|G : G_1| \leqslant 2$ ist, ist G auch endlich.
□

2.2. **Klassifikation von diskreten Untergruppen $G \leqslant \mathbf{Isom}\,(\mathbb{E})$ mit $G \cap \mathbf{T}(\mathbb{E}) = \mathbb{Z}$.**

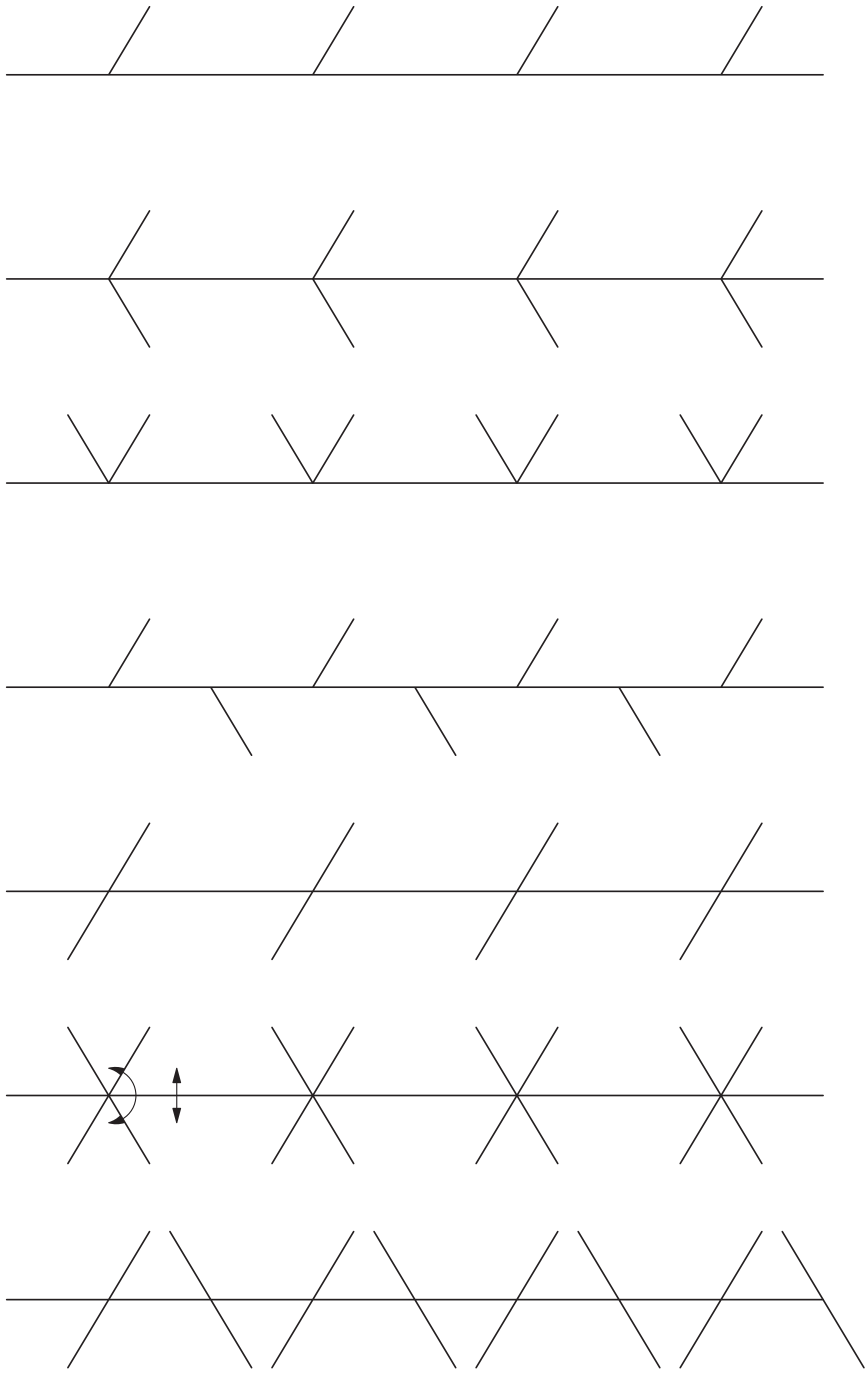
Definition 2.9. Eine diskrete Untergruppe G von $\mathbf{Isom}\,(\mathbb{E})$ heißt *Friesgruppe* (oder *Bandornamentgruppe*), falls folgendes gilt:

$$G \cap \mathbf{T}(\mathbb{E}) \cong \mathbb{Z}.$$

Satz 2.10. Es gibt genau 7 geometrisch verschiedene Typen von Friesen und es gibt genau 4 Isomorphie-Typen von Friesgruppen (s. Fig. 1).

In folgenden Präsentationen steht t für eine Translation, r für eine Rotation, s für eine Spiegelung und g für eine Gleitspiegelung.

$$\begin{aligned}
F_1 &= \langle t \,|\, \rangle \\
F_1^{(1)} &= \langle t, s \,|\, s^2,\ s^{-1}ts = t \rangle \\
F_1^{(2)} &= \langle t, s \,|\, s^2,\ s^{-1}ts = t^{-1} \rangle \\
F_1^{(3)} &= \langle g \,|\, \rangle \\
F_2 &= \langle t, r \,|\, r^2,\ r^{-1}tr = t^{-1} \rangle \\
F_2^{(1)} &= \langle t, r, s \,|\, r^2,\ r^{-1}tr = t^{-1},\ s^2,\ s^{-1}ts = t,\ (sr)^2 \rangle \\
F_2^{(2)} &= \langle t, r, g \,|\, r^2,\ r^{-1}tr = t^{-1},\ g^2 = t,\ g^{-1}tg = t,\ (gr)^2 \rangle.
\end{aligned}$$



$$F_1 = \langle t \mid \, \rangle$$

$$F_1^{(1)} = \langle t, s \mid s^2,\ t^s = t \rangle$$

$$F_1^{(2)} = \langle t, s \mid s^2,\ t^s = t^{-1} \rangle$$

$$F_1^{(3)} = \langle t, g \mid g^2,\ t^g = t \rangle$$

$$F_2 = \langle t, r \mid r^2,\ t^r = t^{-1} \rangle$$

$$F_2^{(1)} = \langle t, r, s \mid r^2,\ t^r = t^{-1},\ s^2,\ t^s = t,\ (sr)^2 \rangle$$

$$F_2^{(2)} = \langle t, r, s \mid r^2,\ t^r = t^{-1},\ g^2 = t,\ t^g = t,\ (gr)^2 \rangle$$

Fig. 1. Bandornamentgruppen

2.3. Klassifikation von diskreten Untergruppen $G \leqslant \mathbf{Isom}\,(\mathbb{E})$ mit $G \cap \mathbf{T}(\mathbb{E}) = \mathbb{Z}^{\mathbf{2}}$.

Definition 2.11. Eine diskrete Untergruppe G von $\mathbf{Isom}\,(\mathbb{E})$ heißt *flache kristallographische Gruppe*, falls folgendes gilt:

$$G \cap \mathbf{T}(\mathbb{E}) \cong \mathbb{Z}^2.$$

Satz 2.12. Es gibt genau 17 Isomorphie-Typen von flachen kristallographischen Gruppen.