Prof. Dr. Oleg Bogopolski　　　　Abgabe: Fr, 26.01.2021, 12:00 Uhr

Grenzfragen der Gruppentheorie und Logik
(WiSe 2020/21)

Übungsblatt 10

Schauen Sie noch einmal das Skript an.

Aufgabe 1. Seien **2+2+10P.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Finden Sie alle Fixpinkte von $\mathcal{T}_A$ und $\mathcal{T}_B$ in $\mathbb{H}$, also alle Punkte $z \in \mathbb{H}$, mit $\mathcal{T}_A(z) = z$, bzw. $\mathcal{T}_B(z) = z$.

b) Wie wirkt $\mathcal{T}_A \circ \mathcal{T}_B$ auf $\mathbb{H}$?

c) Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{H} \,\big|\, |z| \geqslant 1, |\mathrm{Re}(z)| \leqslant \frac{1}{2}\}.$$

Skizzieren Sie die Bilder von $\mathcal{M}$ unter der Wirkung von $\mathcal{T}_{A^i}$ und $\mathcal{T}_{B^j}$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Sei $G = \mathbb{Z}_4 \underset{Z_2}{*} \mathbb{Z}_6$ mit $\mathbb{Z}_4 = \langle a \rangle$ und $\mathbb{Z}_4 = \langle b \rangle$. Beweisen Sie, dass die Untergruppe $H = \langle (ab)^3, (ab^2)^3 \rangle$ von G frei ist. **10P.**

Aufgabe 3. Sei $F = F(x, y)$ die freie Gruppe mit der Basis $\{x, y\}$. Für das Element $w = x^2y^2x^{-3}y \in F$ finden Sie eine Untergruppe H des endlichen Index in F mit $w \notin H$. **10P.**

Aufgabe 4. **5+5P.**

(a) Seien A und B zwei Untergruppen einer Gruppe G. Beweisen Sie

$$|G : (A \cap B)| \leqslant |G : A| \cdot |G : B|.$$

(b) Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G mit $|G : H| < \infty$. Beweisen Sie, dass G eine normale Untergruppe N mit $|G : N| < \infty$ und $N \leqslant H$ besitzt.

Hinweis. Bezeichnung: Für jede Untergruppe H von G sei G/H die **Menge** der linken Nebenklassen von H in G.

(a) Konstruieren Sie eine injektive Abbildung

$$\varphi : G/(A \cap B) \to G/A \times G/B.$$

(b) Betrachen Sie

$$N = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$