Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Fr, 2.02.2021, 12:00 Uhr

Grenzfragen der Gruppentheorie und Logik
(WiSe 2020/21)

Übungsblatt 11

Schauen Sie noch einmal das Skript an.

Aufgabe 1. (schwer) Beweisen Sie den Poincare-Satz: **10P.**
Ist H eine Untergruppe von G mit endlichem Index n, dann besitzt H eine Untergruppe N, die normal in G ist und einen endlichen Index k in G hat mit $n|k$ und $k|(n!)$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass folgende drei Bedingungen für eine Gruppe G äquivalent sind: **10P.**

(a) Die Gruppe G ist residuell endlich.

(b) Der Schnitt von allen normalen Untergruppen von G mit endlichem Index ist gleich 1.

(c) Der Schnitt von allen Untergruppen von G mit endlichem Index ist gleich 1.

Aufgabe 3. **10P.**
Eine Eigenschaft P von endlich präsentierbaren Gruppen heißt *Markov-Eigenschaft*, falls sie unter Isomorphismen erhalten wird und folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:
1) Es existiert eine endlich präsentierbare Gruppe G_1 mit der Eigenschaft P.
2) Es existiert eine endlich präsentierbare Gruppe G_2, die in keine endlich präsentierbare Gruppe mit der Eigenschaft P eingebettet werden kann.

Adian und Rabin (unabhängig) haben folgenden Satz bewiesen:
Ist P eine Markov-Eigenschaft von endlich präsentierbaren Gruppen, dann existiert kein Algorithmus, der für endliche Präsentationen von Gruppen entscheidet, ob die entsprechenden Gruppen die Eigenschaft P haben.

Beweisen Sie: Jede der folgenden Eigenschaften ist eine Markovsche: Eine endlich präsentierbare Gruppe ist trivial, endlich, abelsch, frei, torsionsfrei (= jedes nichttriviale Element hat die Ordnung ∞).