Prof. Dr. Oleg Bogopolski　　　　Abgabe: Di, 24.11.2020, 12:00 Uhr

Grenzfragen der Gruppentheorie und Logik
(WiSe 2020/21)

Übungsblatt 3

Schauen Sie noch einmal das Skript an.

Aufgabe 1. Beweisen Sie: **3+3+4P.**

(a) Die Menge $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} : x = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)\}$ ist primitiv rekursiv.

(b) Beweisen Sie: Sind A und B zwei rekursive (bzw. primitiv rekursive) Teilmengen von $\mathbb{N}$, dann sind die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$ und $\mathbb{N} \setminus A$ rekursiv (bzw. primitiv rekursiv).

(c) Beweisen Sie, dass jede endliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 2. Sei $P(x_1, \dots, x_n, y)$ ein primitiv rekursives Prädikat. Beweisen Sie, dass folgendes Prädikat primitiv rekursiv ist: **10P.**

$$Q(x_1, \dots, x_n, z) := \forall y \big(y \leqslant z \to P(x_1, \dots, x_n, y)\big)$$

Aufgabe 3. **5+5P.**

(a) Beweisen Sie, dass jede primitiv rekursive Menge $M \subseteq \mathbb{N}^n$ rekursiv aufzählbar ist.

(b) Sei $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ ein primitiv rekursives Prädikat. Beweisen Sie, dass folgende Menge rekursiv aufzählbar ist:

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \exists y \exists z\, R(x_1, \dots, x_n, y, z)\}$$

Hinweis zu (b). Benutzen Sie die Funktionen ℓ und r aus Lemma 3.2.

Aufgabe 4. Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge, so dass beide Mengen A und $\mathbb{N} \setminus A$ rekursiv aufzählbar sind. Seien A' und $(\mathbb{N} \setminus A)'$ die Mengen aus der Definition 4.1.3). Überprüfen Sie folgende Formel formal: **10P.**

$$\chi_{A}(x) = \chi_{A'}\Big(x, \mu z \left[\chi_{A'}(x, z) \cdot \chi_{(\mathbb{N}\setminus A)'}(x, z) = 0\right]\Big)$$

Wir haben diese Formel benutzt, um zu beweisen, dass A rekursiv ist (s. Satz von Pohst).