

Grenzfragen der Gruppentheorie und Logik
(WiSe 2020/21)

Übungsblatt 5

Schauen Sie noch einmal das Skript an.

Aufgabe 1.**2+4+4P.**

- (a) Wie viele reduzierte Elemente der Länge 2 gibt es in der freien Gruppe $F(a, b)$?
- (b) Wie viele reduzierte Elemente der Länge k gibt es in der freien Gruppe $F(a, b)$?
- (c) Finden Sie x, y, z in $F(a, b)$, so dass $a^{-1}b^{-1}ab = x^2y^2z^2$ gilt. Es reicht, wenn Sie eine Lösung finden.

Hinweis: reduzierte \equiv gekürzte.

Aufgabe 2.**2+3+5P.**

- (a) Sei $g = a^{-1}b^{-2}a^2b^3a \in F(a, b)$. Berechnen Sie die reduzierte Form von g^3 .
- (b) Sei $1 \neq g \in F(a, b)$. Beweisen Sie, dass $|g^n| > |g|$ für alle $n \geq 2$ gilt.
Hier ist $|g|$ die Länge der reduzierten Form von g .
- (c) Seien u, v zwei Elemente einer freien Gruppe F , so dass $u^n = v^n$ für ein $n \geq 1$ gilt.
Beweisen Sie, dass $u = v$ gilt.

Aufgabe 3. Finden Sie eine Basis einer Untergruppe des Index 4 in $F(a, b)$.

10P.**Aufgabe 4.****4+6P.**

- (a) Ist die Untergruppe $H = \langle ab, ba \rangle$ von $F(a, b)$ normal?
- (b) Ist der Index $|F(a, b) : H|$ endlich?