

Grenzfragen der Gruppentheorie und Logik
(WiSe 2020/21)

Übungsblatt 6

Schauen Sie noch einmal das Skript an.

Aufgabe 1. Seien $A = \langle b, a^2, a^{-1}ba \rangle$ und $B = \langle a, b^2, bab^{-1} \rangle$ zwei Untergruppen der freien Gruppe $F(a, b)$ und sei $C = A \cap B$. **6+3+6P.**

- a) Finden Sie eine Basis von C .
- b) Beweisen Sie, dass C normal in $F(a, b)$ ist.
- c) Beweisen Sie $F(a, b)/C \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 2. Sei R eine nichtleere Teilmenge einer freien Gruppe F . Beweisen Sie: **4P.**
Der normale Abschluss $\langle\langle R \rangle\rangle_F$ ist die kleinste normale Untergruppe von F , die R enthält.

Aufgabe 3. Beweisen Sie: **2+4+6P.**

- a) Es gilt $\langle\langle x^{-1}y^{-1}xy \rangle\rangle = \langle\langle xyx^{-1}y^{-1} \rangle\rangle$.
- b) Es gilt $x^{-2}y^{-1}x^2y \in \langle\langle xyx^{-1}y^{-1} \rangle\rangle$.
- c) Für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt $x^n y^m x^{-n} y^{-m} \in \langle\langle xyx^{-1}y^{-1} \rangle\rangle$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die Gruppe \mathbb{Z}_6 die Präsentationen **2+7P.**

$$\langle x \mid x^6 \rangle \text{ und } \langle x, y \mid x^2, y^3, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$$

hat.