

**Grenzfragen der Gruppentheorie und Logik**  
(WiSe 2020/21)

Übungsblatt 8

*Schauen Sie noch einmal das Skript an.*

**Aufgabe 1.** Seien

**1+2+1+6**

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie:

- 1)  $a^2 = b^3 = c$ .
- 2) Das Zentrum von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist gleich  $\langle c \rangle$ .
- 3)  $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ ,  $\langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ ,  $\langle c \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ .
- 4)  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle a, b \rangle$ .

**Aufgabe 2.** Sei  $G = G_1 \underset{A=B}{*} G_2$  mit  $G_1 \neq A$ ,  $G_2 \neq B$ . Beweisen Sie, dass  $Z(G) \leq Z(A)$  ist. **10P.**

**Aufgabe 3.** Seien  $G_1 = \langle a \mid a^4 = 1 \rangle$  und  $G_2 = \langle b \mid b^6 = 1 \rangle$ . Seien  $A = \langle a^2 \rangle \leq G_1$  und  $B = \langle b^3 \rangle \leq G_2$ . Wir betrachten das amalgamierte Produkt **10P.**

$$G = G_1 \underset{A=B}{*} G_2$$

bezüglich des Isomorphismus  $\varphi : A \rightarrow B$ ,  $a^2 \mapsto b^3$ . Schreiben Sie das Element

$$a^{-1}b^5ab^{-1}a^3 \in G$$

in der  $A$ -Normalform auf bezüglich den Repräsentantensystemen  $T_A := \{1, a\}$  und  $T_B := \{1, b, b^2\}$ .

*Hinweis.* Schauen Sie Satz 9.6.1) und Beispiel im Skript an.

**Ich wünsche Ihnen einen guten Rutsch ins neue Jahr!**