Prof. Dr. Oleg Bogopolski — Abgabe: Di, 19.01.2021, 12:00 Uhr

Grenzfragen der Gruppentheorie und Logik
(WiSe 2020/21)

Übungsblatt 9

Schauen Sie noch einmal das Skript an.

Aufgabe 1. Seien $G = F(a,b)$, $A = \langle a^3 \rangle$ und $B = \langle b^4 \rangle$. Es gilt $A \cong B \cong \mathbb{Z}$. **4+8P.**
Wir betrachten den Isomorphismus $\varphi : A \to B$, $a^3 \mapsto b^4$. Dann ist

$$G^* = \langle a, b, t \,|\, t^{-1}a^3t = b^4 \rangle$$

die HNN Erweiterung von G bezüglich A, B und φ. Wir setzen

$$T_A := \{w, aw, a^2w \,|\, w \text{ ist ein Wort in } G, \text{ das nicht mit } a^{\pm 1} \text{ anfängt}\},$$

$$T_B = \{w, bw, b^2w, b^3w \,|\, w \text{ ist ein Wort in } G, \text{ das nicht mit } b^{\pm 1} \text{ anfängt}\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass T_B das Repräsentantensystem von B in G ist.

(b) Schreiben Sie das Element $x = b^6t^{-1}a^{-5}tb^6abt^{-1}a^5b^2a \in G^*$ in der Normalform bezüglich T_A, T_B und φ auf.

Aufgabe 2. Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch die Möbius Transformationen $\mathcal{T}_X$, $X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (s. Kurzskript). Beweisen Sie, dass die Menge **10P.**

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

invariant unter dieser Operierung ist, d.h. es gilt $\mathcal{T}_X(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H}$ für jede Matrix $X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Hinweis. Benutzen Sie die bekannten Erzeuger von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3. Unter einer Geraden in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ verstehen wir eine Gerade in $\mathbb{C}$ zusammen mit ∞. Es ist bekannt, dass jede Möbiustransformation $\mathcal{T}_X$, wobei $X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist, die Geraden in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf Geraden in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ oder auf Kreise in $\mathbb{C}$ abbildet. Auch ist es bekannt, dass jede Möbiustransformation $\mathcal{T}_X$ *konform* ist, also die Winkel zwischen Geraden (bzw. Kreisen) erhält. Sei **12P.**

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie genau die Bilder der folgenden Mengen unter $\mathcal{T}_D$:

$$L_1 := \{-1 + ti \,|\, t > 0\}, \quad L_2 := \{ti \,|\, t > 0\}, \quad L_3 := \{1 + ti \,|\, t > 0\},$$

$$M_1 = \{t + i \,|\, t \in \mathbb{R}\}, \quad M_2 = \{t + 2i \,|\, t \in \mathbb{R}\}, \quad M_3 = \{t + 3i \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$