A.2 Seien A und B zwei rekursiv aufzählbare Teilmengen von $\mathbb{N}^n$. Beweisen Sie, dass $A \cap B$ und $A \cup B$ rekursiv aufzählbar sind.

<u>Bew</u>. Nach Def. existieren primitiv rekursive Teilmengen $A', B' \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$:

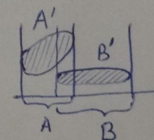
$$\bar{x} \in A \Leftrightarrow \exists y\, ((\bar{x}, y) \in A') \quad , \quad \bar{x} \in B \Leftrightarrow \exists y\, ((\bar{x}, y) \in B')$$

1)

$$\bar{x} \in A \cup B \Leftrightarrow \exists y\, ((\bar{x}, y) \in \underbrace{A' \cup B'}_{\text{prim. rek. nach A.1 (b) aus Blatt 3.}})$$

$\Rightarrow$ $A \cup B$ ist rekursiv aufzählbar.

2)



<u>Falsch</u>: $x \in A \cap B \Leftrightarrow \exists y\, ((\bar{x}, y) \in A' \cap B')$

<u>Richtig</u>: $A \cap B = \{x \in \mathbb{N}^n \mid \exists y \exists z\, ((\bar{x}, y) \in A' \wedge (\bar{x}, y) \in B')\}$

$$= \{x \in \mathbb{N}^n \mid \exists y \exists z\ R(\bar{x}, y, z)\}, \text{ wobei}$$

$R(\bar{x}, y, z) := P(\bar{x}, y, z) \wedge Q(\bar{x}, y, z)$, wobei

$$P(\bar{x}, y, z) = \begin{cases} t, & (\bar{x}, y) \in A' \\ f, & (\bar{x}, y) \notin A' \end{cases} \qquad Q(\bar{x}, y, z) = \begin{cases} t, & (\bar{x}, z) \in B' \\ f, & (\bar{x}, z) \notin B' \end{cases}$$

<u>Beh</u> $R(\bar{x}, y, z)$ ist ein primitiv rekursiver Prädikat:

<u>Bew</u> Es genügt z.z., dass P und Q prim. rek. sind. Dann wird $R = P \wedge Q$ ebenfalls prim. rek, weil $\chi_R = \max\{\chi_P, \chi_Q\}$.

$$\chi_P(\bar{x}, y, z) = \chi_{A'}(P_1^{n+2}(\bar{x}, y, z), \ldots, P_n^{n+2}(\bar{x}, y, z), P_{n+1}^{n+2}(\bar{x}, y, z))$$

ist prim. rek, weil A' prim. rek. ist. Analog χ_Q ist prim. rek

Definiere $S(\bar{x}, t) := R(\bar{x}, l(t), r(t))$, wobei c, l, t die Cantor-Funk. sind

Dann ist

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{N}^n \mid \exists t\ \underbrace{S(\bar{x}, t)}_{\text{prim. rek. Prädikat}}\}$$

$\Rightarrow$ $A \cap B$ ist rek. aufzählbar

(A.3) Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale rekursive Funktion, so dass $f(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Beweisen Sie, dass $im(f)$ rekursiv ist.

Bew. $$\chi_{im(f)}(x) = sg \prod_{i=0}^{x} |x - f(i)|$$

Fall 1 $\quad x \in im(f)$. $\quad$ Linke Seite $= 0$

$\Downarrow$

$\exists i < x : x = f(i)$ $\quad$ Rechte Seite $= sg(0) = 0$

Fall 2 $\quad x \notin im(f)$ $\quad$ Linke Seite $= 1$

$\Downarrow$

$\nexists i : f(i) = x$ $\quad$ Rechte Seite $= sg(\geq 1) = 1$.

(A.4) Eine partiell rekursive Funktion $F(x,y)$ heißt universell, wenn für jede partiell rekursive Funktion $f(x)$ ein $y_0 \in \mathbb{N}$ existiert, s.d. $f(x) = F(x, y_0)$ gilt. Es ist bekannt, dass eine solche Funktion F existiert. Beweisen Sie, dass die Menge $M = \{x \mid F(x,x) = 0\}$ nicht rekursiv ist.

Bew Nehmen wir an, dass M rekursiv ist. Dann ist χ_M (und somit auch $\chi_{\mathbb{N} \setminus M}$) rekursiv.

$\Rightarrow \exists y_0 \in \mathbb{N} : \chi_{\mathbb{N} \setminus M} = F(x, y_0)$. Insbesondere nimmt $F(x,y_0)$ nur die Werte 0 und 1 an.

Dann gilt $y_0 \in M \Leftrightarrow \chi_{\mathbb{N} \setminus M}(y_0) = 1 \Leftrightarrow F(y_0, y_0) = 1 \Leftrightarrow y_0 \notin M$

ein Widerspruch.

(A.1.) Sei $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ eine totale rekursive Funktion und sei $a \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass folgende Menge rekursiv ist

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = a\}$$

Bew. $\chi_M = sg\, |f(x_1, \dots, x_n) - a|$.