Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Fr., 9.07.2021, bis 8:45 Uhr

Kummertheorie und der Fermat'sche Satz
(SoSe 2021)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

1) Wir betrachten die folgenden Ideale in $\mathcal{O}_K$: **4P**

$$A = (2,\ 1+\sqrt{-5}), \quad B = (3,\ 1+\sqrt{-5}), \quad C = (3,\ 1-\sqrt{-5}).$$

Beweisen Sie, dass diese Ideale äquivalent sind: $A \sim B \sim C$.

2) Finden Sie alle Zahlen $\omega \in \mathcal{O}_K$ mit $\omega|2$ in $\mathcal{O}_K$. **4P**

3) Beweisen Sie, dass das Ideal $(2, 1+\sqrt{-5})$ in $\mathcal{O}_K$ kein Hauptideal ist. **4P**

Bemerkung: Daraus folgt $h_K \geqslant 2$.

Hinweis.

Zu 1): Benutzen Sie nur die Zahlen 3, $1-\sqrt{-5}$ und $1+\sqrt{-5}$ für α und β in der Definition 8.9 im Kurzskript.

Zu 2): Benutzen Sie die Beschreibung von $\mathcal{O}_K$ und Normen.

Zu 3): Benutzen Sie 2).

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Idealklassenzahl h_K für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. **5P.**

Hinweis. Schauen Sie die Definition von $N(A)$ in Appendix B und die korrigiertee Minkowski-Formel im Appendix C des Skripts an. Was bedeutet die Gleichung $N(A) = 1$ für ein Ideal?

Aufgabe 3. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Wir betrachten folgende Ideale in $\mathcal{O}_K$: **5+5+5P**

$$\mathbb{P}_1 = (11, 4+\sqrt{5}), \ \ \mathbb{P}_2 = (11, 4-\sqrt{5}).$$

a) Beweisen Sie, dass $(11) = \mathbb{P}_1\mathbb{P}_2$ ist.
b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}_2$ ist.
c) Beweisen Sie, dass $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ Primideale sind.