Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Fr, 7.05, 8:45 Uhr

Kummertheorie und der Fermatsche Satz
(SoSe 2021)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei $f(x) = x^5 - x - 1$. **6+4P.**
a) Beweisen Sie, dass $f(x)$ irreduzibel über $\mathbb{Z}$ ist.
b) Beweisen Sie, dass $f(x)$ reduzibel über $\mathbb{Z}_2$ ist.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ gilt. **10P.**

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl und sei $1 \neq \zeta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $x^p - 1$. **4+6P**

a) Begründen Sie, dass $1, \zeta, \ldots, \zeta^{p-2}$ eine Basis der Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)$ ist.

b) Berechnen Sie $\Delta(1, \zeta, \ldots, \zeta^{p-2})$.

Aufgabe 4 können Sie nach der Vorlesung am Dienstag lösen.

Aufgabe 4. Sei k ein **unendlicher** Körper und sei $K = k(\alpha_1, \alpha_2)$ eine separable Erweiterung von k mit $[K : k] = n < \infty$. Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ alle Einbettungen von K in k^{a} über k. Beweisen Sie: **5+5P**

a) Es existiert ein $c \in k$ mit $\sigma_i(\alpha_1 + c\alpha_2) \neq \sigma_j(\alpha_1 + c\alpha_2)$ für alle $i \neq j$.

b) $K = k(\alpha_1 + c\alpha_2)$.

Hinweis zu b):
Sei c aus a). Wie viele Einbettungen (über k) hat $k(\alpha_1 + c\alpha_2)$ in k^{a}?
Was kann man über den Grad des Minimalpolynoms $m_{\alpha_1+c\alpha_2}(x)$ sagen?