

**Kummertheorie und der Fermat'sche Satz**  
(SoSe 2021)

Übungsblatt 5

**Aufgabe 1.**

**3+4P**

- a) Finden Sie alle quadratischen Reste modulo 17.
- b) Ist 60 ein quadratischer Rest modulo 137?

*Hinweis.* Siehe Appendix A im Skript.

**Aufgabe 2.**

**6+3+4P**

- a) Berechnen Sie  $(\mathcal{O}_K)^*$  für  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ , wobei  $m \in \mathbb{N}$  ist.
- b) Finden Sie ein  $\alpha \neq \pm 1$  in  $(\mathcal{O}_K)^*$  für  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .
- c) Beweisen Sie: Für  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  gilt  $|(\mathcal{O}_K)^*| = \infty$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $\alpha$  eine Nullstelle des Polynoms  $x^3 + 2$  und sei  $\beta$  eine Nullstelle des Polynoms  $x^2 - x + 1$ . Finden Sie eine Matrix  $C$  mit Einträgen in  $\mathbb{Z}$ , so dass  $\alpha + \beta$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $\chi_C(x) = \det(xE - C)$  ist. **10P.**